Marco Minozzo e Annamaria Guolo
Laurea in Economia del Commercio Internazionale
Laurea in Economia e Amministrazione delle Imprese
Università degli Studi di Verona (sede di Vicenza)

Calcolo delle Probabilità
Soluzioni 2. Calcolo combinatorio

Introduzione

<u>INSIEME PRODOTTO</u>
Problema: Quante sono le possibili chiamate in una partita a “battaglia navale” con uno schema a 10 righe e 12 colonne?

Definizione: Dati due insiemi A e B, l'*insieme prodotto* di A e B, indicato con $A \times B$, è l'insieme delle coppie ordinate (a, b) dove $a \in A$ e $b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Se A e B sono due insiemi rispettivamente di p e q elementi, allora il loro *insieme prodotto* $A \times B$ ne avrà $p \times q$.

<u>PERMUTAZIONI SEMPLICI</u>
Problema: Tre studenti devono sostenere un esame orale e segnano i loro nomi su un foglio per stabilire l'ordine delle interrogazioni. In quanti modi può essere compilata una tale lista?

Definizione: Dato un insieme E di n elementi, diremo sua *permutazione* ciascuno dei possibili modi di ordinare tali elementi, ossia ogni n-upla (ordinata) ottenuta con essi in modo da usarli tutti.

Problema: In quanti modi si possono ordinare gli elementi di un insieme E di n elementi? Ovvero, quante sono le possibili *permutazioni* di un insieme E di n elementi?

Definizione: Dato un numero naturale n, si chiama *n-fattoriale*, o *fattoriale di n*, indicato con $n!$, il prodotto:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1, \qquad (0! = 1).$$

Le possibili *permutazioni* P_n di un insieme di n elementi sono $n!$, ovvero $P_1 = 1$, $P_2 = 2$ ed, in generale,

$$P_n = n! = nP_{n-1} = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1.$$

<u>DISPOSIZIONI SEMPLICI</u>
Problema: Cinque studenti devono sostenere un esame orale e devono segnare i loro nomi su un foglio. Si supponga che la commissione decida di interrogare i candidati in due giorni diversi, due

il primo giorno e tre il secondo giorno. In quanti modi può essere compilata la lista (ordinata) degli studenti da interrogare il primo giorno?

Definizione: Dato un insieme E di n elementi, i suoi sottoinsiemi ordinati di m elementi $(0 \leq m \leq n)$ prendono il nome di *disposizioni (semplici)* di n oggetti a m a m.

Indicando con $D_{n,m}$ il numero di tali disposizioni, si ha

$$D_{n,1} = n, \quad D_{n,n} = n! \quad D_{n,m} = \frac{P_n}{P_{n-m}} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-m+1),$$

dove, per convenzione, $D_{n,0} = 1$.

<u>COMBINAZIONI SEMPLICI</u>

Problema: Cinque studenti devono sostenere un esame scritto e devono segnare i loro nomi su un foglio. Si supponga che la commissione decida di utilizzare due aule, una con due posti e l'altra con tre posti. In quanti modi si possono scegliere due studenti da sistemare nella prima aula?

Definizione: Dato un insieme di n oggetti, si chiamano *combinazioni (semplici)* di n elementi, a m a m, i sottoinsiemi di m elementi ($0 \leq m \leq n$) che si possono ottenere con gli n elementi.

Problema: Quante sono le *combinazioni (semplici)* $C_{n,m}$ di n oggetti a m a m? ($0 \leq m \leq n$)

Il numero $C_{n,m}$ di *combinazioni (semplici)* di n oggetti a m a m è pari a

$$C_{n,m} = \frac{D_{n,m}}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1))}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \binom{n}{m},$$

dove $\binom{n}{m}$ si chiama *coefficiente binomiale*, e

$$C_{n,0} = \binom{n}{0} = 1, \quad C_{n,1} = \binom{n}{1} = n, \quad C_{n,n} = \binom{n}{n} = 1.$$

<u>DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE</u>

Problema: Si voglia colorare tre finestre allineate e si supponga di avere a disposizione solo due colori, arancione e blu (ogni finestra si può colorare con un solo colore). In quanti modi è possibile colorare le tre finestre?

Definizione: Si dice *disposizione con ripetizione* di classe m di n tipi di oggetti, una lista ordinata di lunghezza m, in cui ogni singolo tipo di oggetto può apparire più di una volta (m può essere maggiore di n).

Il numero $D^{(r)}_{n,m}$ di *disposizioni con ripetizione* di classe m di n oggetti è pari a

$$D^{(r)}_{n,m} = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{m \text{ volte}} = n^m$$

PERMUTAZIONI TRA ELEMENTI NON TUTTI DISTINTI

Problema: Siano date tre matite colorate: due arancioni e una blu. In quanti modi è possibile allineare le tre matite?

Problema: Siano dati n oggetti, di cui n_1 di tipo A_1, n_2 di tipo A_2, $\dots$, n_k di tipo A_k, con $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. In quanti modi è possibile allineare gli n oggetti, considerando che non sono tutti distinguibili tra loro?

Il numero di *permutazioni* di n oggetti *non tutti distinguibili* tra loro (cioè, considerando come uguali due permutazioni se formano la stessa sequenza di tipi) è pari a

$$P_n^{(n_1,\dots,n_k)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}.$$

COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

Definizione: Siano dati n tipi $A_1, A_2, \dots, A_n$ di oggetti. Si chiamano *combinazioni con ripetizione* di n oggetti m ad m (m può essere maggiore di n) gli insiemi di m elementi formati con oggetti di questo tipo. Indicando con $C_{n,m}^{(r)}$ il numero di tali combinazioni, si ha

$$C_{n,m}^{(r)} = C_{n+m-1,m} = \binom{n+m-1}{m}.$$

Esercizio A. Le cifre dispari sono $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. La prima cifra del numero può essere scelta in 5 modi, la seconda in 4 modi, la terza in 3 modi, la quarta in 2 modi e l'ultima è la cifra che ancora non è stata scelta. I numeri formati da 5 cifre dispari distinte sono dunque $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$.

Le cifre pari sono $\{0, 2, 4, 6, 8\}$. Le cifre pari uguali che devono seguire le cinque cifre dispari possono essere scelte in 5 modi. I numeri formati da 5 cifre dispari seguite da 2 cifre pari uguali sono dunque $(5!) \cdot 5 = 120 \cdot 5 = 600$.

Esercizio B. Ci sono 2 modi per scegliere la squadra del vincitore; dopo di che, c'è solo da ordinare i cavalieri delle due formazioni. Si ottiene $2 \cdot (5!)^2 = 28800$.

Esercizio C. a) Le sette persone si possono disporre lungo una linea in $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdots 2 \cdot 1 = 7!$ modi.
b) Una persona può sedersi in un posto qualsiasi del tavolo circolare. Le altre 6, allora, possono sedersi in $6 \cdot 5 \cdots 2 \cdot 1 = 6!$ modi. (In generale si parla di *permutazioni circolari*: n oggetti possono essere sistemati attorno ad un cerchio in $(n - 1)!$ modi.)

Esercizio D. a) Ogni pallina del campione ordinato può essere estratta in 8 modi, quindi ci sono $8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^3 = 512$ campioni con reinserimento.

b) La prima pallina del campione ordinato può essere estratta in 8 modi, la successiva in 7 modi e l'ultima in 6 modi. Ci sono quindi $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ campioni senza reinserimento.

Esercizio E. Si supponga inizialmente che Bruno si sia piazzato al terzo posto: resta solo da scegliere gli altri 4 vincitori dai 19 concorrenti rimasti; ciò può essere fatto in $19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 93024$ modi.

Si consideri ora il caso che Bruno sia tra i vincitori: ciò significa che Bruno può occupare uno qualunque dei primi 5 posti, per cui restano poi da scegliere gli altri 4 vincitori dai 19 concorrenti rimasti. Ci sono dunque $5 \cdot 93024 = 465120$ possibili assegnazioni.

Esercizio F. La prima bottiglia può essere scelta in 100 modi, la seconda in 99 modi; i modi per scegliere le due bottiglie sono, pertanto, $100 \cdot 99 = 9900$.

Esercizio G. Essendo due numeri già fissati, resta solo da sceglierne altri 3 dai rimanenti 88; pertanto le possibili cinquine in cui compaiono due numeri prefissati sono:

$$C_{88,3} = \binom{88}{3} = 109736.$$

Esercizio H. Ci sono 5 modi di scegliere il Paese con almeno 3 vincitori; si indichi con A il Paese scelto. Se i vincitori di A sono esattamente 3, se ne devono scegliere 3 tra i 6 elementi di A e 2 tra i 24 componenti delle squadre degli altri Paesi. Se tra i vincitori ci sono 4 elementi di A bisogna scegliere questi 4 tra i 6 elementi del Paese e 1 fra gli altri 24 componenti delle squadre degli altri paesi. Nell'ultimo caso basta solo scegliere i 5 vincitori di A tra i 6 elementi di A. Si ottiene così:

$$5 \cdot \left[\binom{6}{3} \cdot \binom{24}{2} + \binom{6}{4} \cdot \binom{24}{1} + \binom{6}{5} \cdot \binom{24}{0} \right] = 29430.$$

Esercizio I. I possibili modi di suddividere le 20 cavie in 2 gruppi da 10 sono

$$C_{20,10} = \binom{20}{10} = \frac{20!}{10! \cdot 10!}.$$

Esercizio J. a) Le 8 domande possono essere scelte in $C_{10,8}$ modi, dove

$$C_{10,8} = \binom{10}{8} = 45.$$

b) Se lo studente deve rispondere alle prime 3 domande, può scegliere le altre 5 tra le rimanenti 7; ciò può essere fatto in

$$C_{7,5} = \binom{7}{5} = 21$$

modi.
c) Se risponde alle prime 5 domande, allora può scegliere le altre 3 domande tra le ultime 5 in $C_{5,3}$ modi. Se, invece, risponde solo a 4 delle prime 5 domande, può scegliere queste prime 4 in $C_{5,4}$ modi e le altre 4 tra le ultime 5 in $C_{5,4}$ modi. Lo studente ha allora un totale di

$$C_{5,3} + C_{5,4} \cdot C_{5,4} = \binom{5}{3} + \binom{5}{4} \cdot \binom{5}{4} = 10 + 5 \cdot 5 = 35$$

scelte.

Esercizio K. I tre uomini possono essere scelti tra i 7 uomini in $C_{7,3}$ modi e le due donne possono essere scelte tra le 5 donne in $C_{5,2}$ modi. Pertanto le commissioni possono essere scelte in

$$C_{7,3} \cdot C_{5,2} = \binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} = 350$$

modi.