UTILITÀ

I filosofi utilitaristi inglesi della fine 800 usavano il concetto di UTILITA' per misurare il benessere di un individuo

Questo presenta molti problemi:

- Come misurare l'utilità in termini assoluti e fare comparazioni tra persone diverse?

- Di quanto cambierebbe l'utilità (felicità) di un individuo se consumasse più pane o meno riso?

La moderna teoria del consumo usa piuttosto **l'utilità** come un **mezzo** per **descrivere le preferenze** dei consumatori.

Ciò che conta è la possibilità di stabilire se un paniere possa offrire una utilità (soddisfazione) maggiore, non stabilire esattamente di quanto.

Una **funzione di utilità** è un modo per **associare un numero** a ogni paniere in modo che **ai panieri preferiti** siano assegnati **numeri più elevati**.
Se $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$ allora $u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2)$

La funzione di utilità è una **legge** che assegna a ogni possibile paniere di consumo un **numero**, in modo che i panieri preferiti ricevono numeri maggiori dei panieri non preferiti.

Ciò che conta è la classifica dei panieri che, non la grandezza della funzione di utilità.

L'utilità è perciò un concetto **ORDINALE**

Esempio: prendiamo 3 panieri A, B, C tali che $A \succ B \succ C$

Vi sono moltissime funzioni di utilità che permettono di rappresentare questo ordine di preferenze

Paniere	U_1	U_2	U_3
A	3	25	-1
B	2	10	-2
C	1	2	-3

Se invece fosse possibile assegnare un numero univoco e preciso ad ogni paniere avremmo l'**UTILITÀ CARDINALE**

Da una funzione di **UTILITÀ ORDINALE** è possibile derivarne altre per mezzo di trasformazioni **MONOTONE**

- **Una trasformazione monotona preserva l'ordinamento di partenza**
- Se $f(u)$ è una trasformazione monotona di u allora quando $u_1 \succ u_2$ anche $f(u_1) \succ f(u_2)$

Esempi: $f(u) = 3u, \quad f(u) = u + 2, \quad f(u) = u^3$

COSTRUZIONE DELLE FUNZIONI DI UTILITÀ

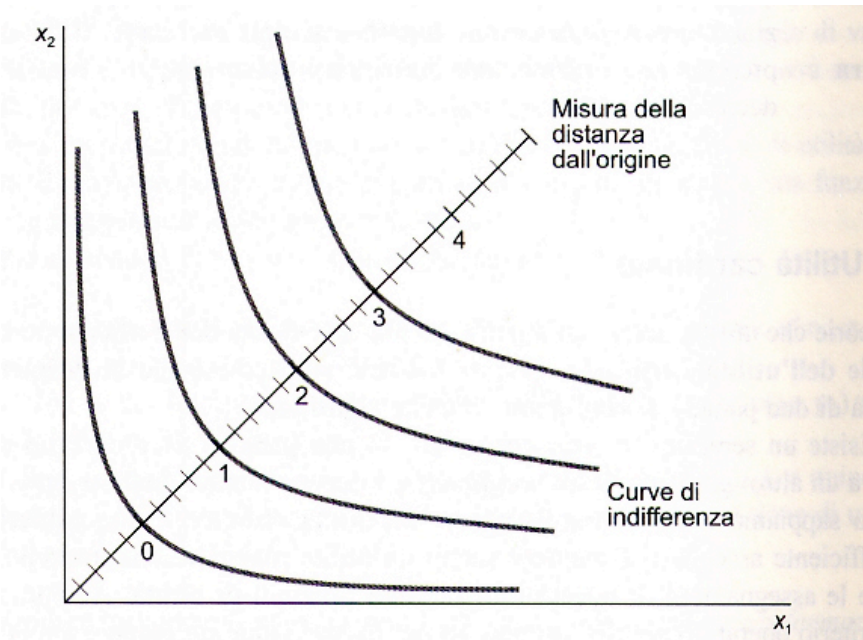
Dato un ordinamento delle preferenze è possibile trovare una funzione di utilità che ordini i panieri nello stesso modo?

- **Si se le preferenze sono COMPLETE, RIFLESSIVE e TRANSITIVE**

Esempio: **preferenze non transitive**.
Se $A \succ B \succ C \succ A$ una funzione di utilità dovrebbe produrre un risultato numerico tale che
$u(A) \succ u(B) \succ u(C) \succ u(A)$. Questo è impossibile!

Una funzione di utilità è un modo per assegnare numeri più alti alle curve di indifferenza più alte.

Tracciando la diagonale e misurando la distanza dall'origine si attribuisce un numero crescente alle curve di indifferenza via via più spostate a destra:



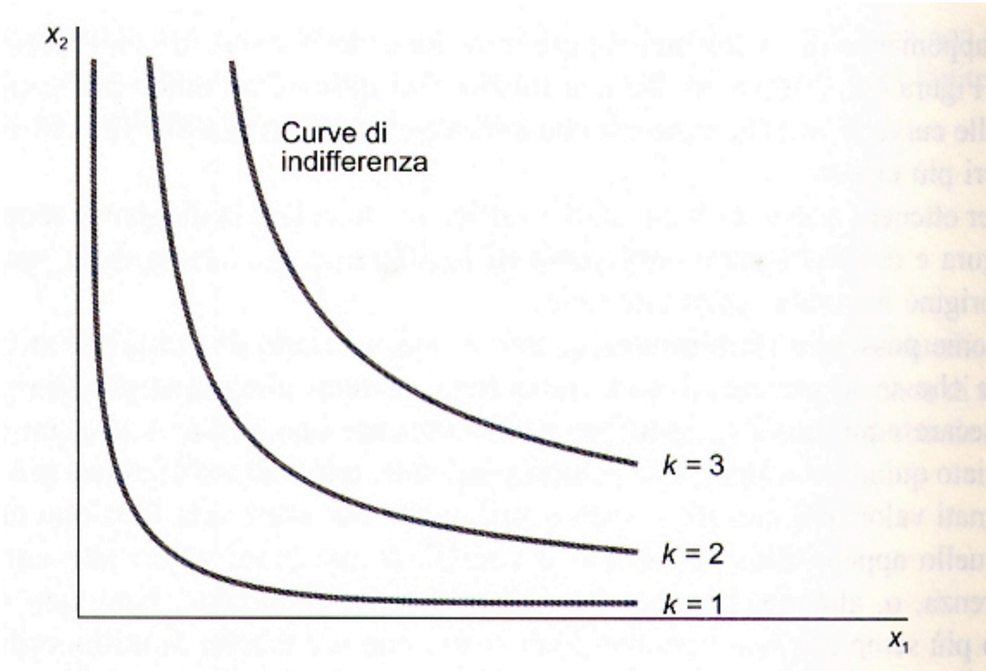
Funzione di utilità e curve di indifferenza. Tracciamo una diag e assegniamo un valore a ciascuna curva di indifferenza a secon quanto dista dall'origine, misurando la distanza lungo la retta.

Data una funzione di utilità, le curve di indifferenza sono **Curve di Livello che rappresentano la stessa utilità**.

Esempio: si consideri la funzione di utilità $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$
Una curva di indifferenza è l'insieme delle combinazioni dei due beni per cui $k = x_1 x_2$ (*k* è un valore costante).

Risolvendo per x_2 si ottiene $x_2 = \dfrac{k}{x_1}$.

- Per diversi valori di *k* si ottiene il grafico seguente



Curve di indifferenza. Le curve di indifferenza $k = x_1 x_2$ per v
diversi di k.

Una trasformazione monotona sarà

$$v(x_1, x_2) = x_1{}^2 x_2{}^2 = (x_1 x_2)^2 = u(x_1, x_2)^2$$

Stessa forma ma valori associati diversi

Esempio: perfetti sostituti

- In questo caso una possibile funzione di utilità sarà $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

- In generale $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$

- *a* e *b* sono il "valore" che il consumatore attribuisce ai due beni.
- L'inclinazione delle curve di indifferenza sarà a/b

Esempio: perfetti complementi (scarpe, zucchero e caffè)

- $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$

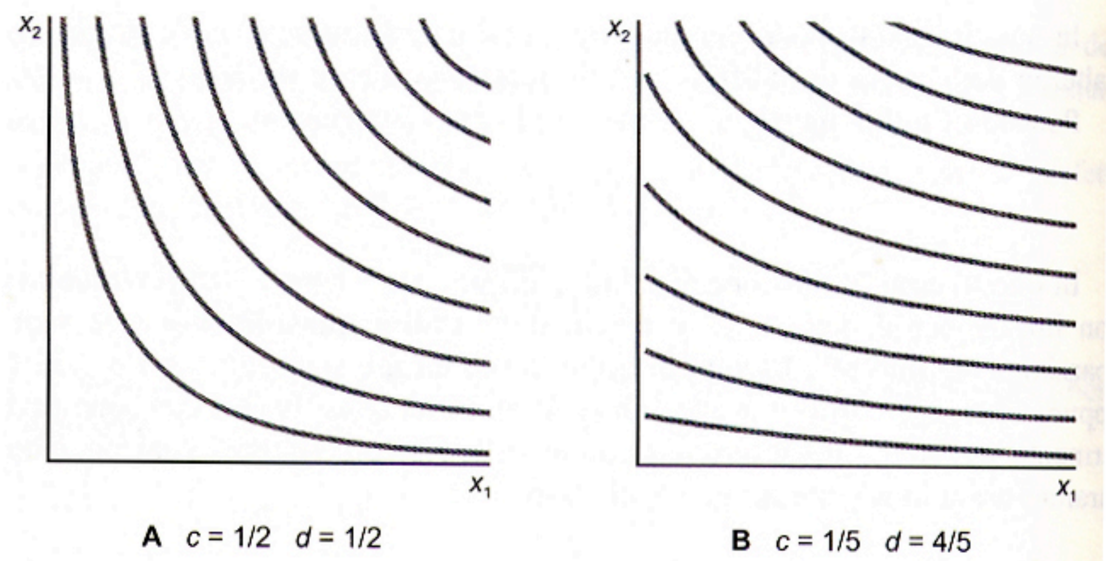
- Se $X = (10,10) \rightarrow u(x_1, x_2) = 10$

- Se $X = (11,10) \rightarrow u(x_1, x_2) = 10$

Esempio: preferenze "regolari"

Una funzione di utilità molto usata per rappresentare preferenze "regolari" è la **Cobb-Douglas:**

- $u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d \quad c > 0, d > 0$



ura **Curve di indifferenza Cobb-Douglas.** Il quadro A rappresenta il cas in cui $c = 1/2$, $d = 1/2$ e il quadro B il caso in cui $c = 1/5$, $d = 4/5$

- Le curve di indifferenza Cobb-Douglas godono delle proprietà di **convessità** e **monotonicità**

- Questo permette di riscriverle in forme molto semplici e utili

  Es. 1): **trasformazione logaritmica**

$$v(x_1, x_2) = \ln(x_1^c x_2^d) = c \ln x_1 + d \ln x_2$$

Es 2): **eleviamo la funzione di utilità alla potenza** $1/(c+d)$

- $v(x_1, x_2) = x_1^{\frac{c}{c+d}} x_2^{\frac{d}{c+d}}$

Definendo $a = \dfrac{c}{c+d} \rightarrow (1-a) = \dfrac{d}{c+d}$

- $v(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$

- **In questa funzione di utilità Cobb-Douglas, la somma degli esponenti è 1**!

- *a* e (*1 – a*) sono le **quote** dei beni 1 e 2 nel paniere del consumatore

UTILITÀ MARGINALE

Prendiamo un paniere (x_1, x_2). Di quanto cambia l'utilità del consumatore se aumenta di poco la quantità del bene 1 (2)?

- **Questo saggio di variazione è l'Utilità Marginale (MU) del bene 1 (2)**

Matematicamente:

$$MU_1 = \frac{\Delta U}{\Delta x_1} = \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1}$$

$$MU_2 = \frac{\Delta U}{\Delta x_2} = \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_2}$$

La variazione dell'utilità sarà perciò

$$\Delta U = MU_1 \Delta x_1 \qquad \Delta U = MU_2 \Delta x_2$$

Per piccolissime variazioni $(\Delta x \rightarrow 0)$, l'utilità marginale è la derivata parziale della funzione di utilità

$$MU_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} \quad , \quad MU_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2}$$

- **Il valore della MU dipende dalla specifica forma della funzione di utilità e non ha particolare significato economico**

- **L'utilità marginale permette però di calcolare il Saggio Marginale di Sostituzione (MRS) che misura la pendenza in un punto delle curve di indifferenza**

Prendiamo una variazione del consumo che mantenga costante l'utilità:

$$MU_1 \Delta x_1 + MU_2 \Delta x_2 = \Delta U = 0$$

$$MU_2 \Delta x_2 = -MU_1 \Delta x_1$$

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{MU_1}{MU_2}$$

Il MRS è negativo e pari al rapporto tra le utilità marginali!

Calcole del MRS con le derivate:

Il differenziale della funzione di utilità è

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2$$

Lungo una curva di indifferenza $dU = 0$ per cui

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial x_2}}$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{MU_1}{MU_2}$$

MRS nel caso di preferenze Cobb-Douglas?

Usiamo la trasformazione monotona logaritmica della funzione

$$v(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d$$

$$u(x_1, x_2) = c \ln x_1 + d \ln x_2$$

$$MU_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} = c\frac{1}{x_1} \qquad MU_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2} = d\frac{1}{x_2}$$

$$MRS = -\frac{MU_1}{MU_2} = -\frac{\frac{c}{x_1}}{\frac{d}{x_2}}$$

- $MRS = -\frac{c}{d}\frac{x_2}{x_1}$