Marco Minozzo e Annamaria Guolo

Laurea in Economia del Commercio Internazionale
Laurea in Economia e Amministrazione delle Imprese
Università degli Studi di Verona (sede di Vicenza)

Calcolo delle Probabilità
Soluzioni 10. Distribuzione normale

Distribuzione normale. La v.a. normale è una variabile continua, la più importante in quanto approssima la distribuzione empirica di moltissimi fenomeni che si riscontrano nella realtà. La variabile assume valori sull'intero asse reale.
Sia $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. La funzione di densità di X in un punto x è data da

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

- X ha valore atteso $E(X) = \mu$.
- X ha varianza $Var(X) = \sigma^2$.
- Data $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, si ha che la variabile standardizzata $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ha distribuzione $N(0, 1)$.
- I valori della funzione di ripartizione di $Z \sim N(0, 1)$, normale standard, sono tabulati.

Esercizio A. Essendo Z una variabile aleatoria con distribuzione $\mathcal{N}(0,\ 1)$, le probabilità richieste sono date da:
(i) $\mathsf{P}(Z \le 1,38) = 0,9162$;
(ii) $\mathsf{P}(Z > 1,73) = 1 - \mathsf{P}(Z \le 1,73) = 1 - 0,9582 = 0,0418$;
(iii) $\mathsf{P}(Z < -1,54) = 1 - \mathsf{P}(Z \ge -1,54) = 1 - \mathsf{P}(Z \le 1,54) = 1 - 0,9382 = 0,0618$;
(iv) $\mathsf{P}(-1,50 < Z \le 1,50) = 2[\mathsf{P}(Z \le 1,50) - 0,5] = 2[0,9332 - 0,5] = 0,8664$;
(v) $\mathsf{P}(-1,67 < Z \le 0,45) = \mathsf{P}(Z \le 0,45) - \mathsf{P}(Z \le -1,67)$
$= \mathsf{P}(Z \le 0,45) - [1 - \mathsf{P}(Z \le 1,67)] = 0,6736 - [1 - 0,9525] = 0,6261.$

Esercizio B. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione $\mathcal{N}(8,\ 7)$. Allora:
(i) $\mathsf{P}(X \le 6,7) = \mathsf{P}\left(\frac{X-8}{\sqrt{7}} \le \frac{6,7-8}{\sqrt{7}}\right) = \mathsf{P}\big(\mathcal{N}(0,\ 1) \le -0,49\big)$
$= 1 - \mathsf{P}\big(\mathcal{N}(0,\ 1) \le 0,49\big) = 1 - 0,6879 = 0,3121$;
(ii) $\mathsf{P}(X > 7,5) = \mathsf{P}\left(\mathcal{N}(0,\ 1) > \frac{7,5-8}{\sqrt{7}}\right) = \mathsf{P}\big(\mathcal{N}(0,\ 1) > -0,189\big) = 0,4247$;
(iii) $\mathsf{P}(5,5 < X < 10,5) = \mathsf{P}\big(-0,9449 < \mathcal{N}(0,\ 1) < 0,9449\big)$
$= 2[\mathsf{P}(\mathcal{N}(0,\ 1) < 0,9449) - 0,5] = 0,6528$;
(iv) $\mathsf{P}(7,5 < X \le 9,5) = \mathsf{P}\big(-0,189 < \mathcal{N}(0,\ 1) < 0,567\big)$
$= \mathsf{P}(\mathcal{N}(0,\ 1) \le 0,567) - \mathsf{P}(\mathcal{N}(0,\ 1) \le -0,189) = 0,7157 - [1 - 0,5753] = 0,291.$

Esercizio C. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione $\mathcal{N}(20,\ 23)$.
(i) $\mathsf{P}(X \le c) = \mathsf{P}\left(\mathcal{N}(0,\ 1) \le \frac{c-20}{\sqrt{23}}\right) = 0,8485$, per cui, essendo $\mathsf{P}(\mathcal{N}(0,\ 1) \le 1,03) = 0,8485$, segue che $1,03 = (c-20)/\sqrt{23}$, e perciò $c = 24,94$;
(ii) $\mathsf{P}(X > c) = \mathsf{P}\left(\mathcal{N}(0,\ 1) > \frac{c-20}{\sqrt{23}}\right) = 0,0505$, per cui, essendo $\mathsf{P}(\mathcal{N}(0,\ 1) > 1,64) = 0,0505$, segue che $1,64 = (c-20)/\sqrt{23}$, e perciò $c = 27,87$;
(iii) $\mathsf{P}(\mu - c < X < \mu + c) = \mathsf{P}\left(\frac{-c}{\sqrt{23}} < \mathcal{N}(0,\ 1) < \frac{c}{\sqrt{23}}\right) = 0,90$, per cui, essendo $\mathsf{P}(-1,645 < \mathcal{N}(0,\ 1) < 1,645) = 0,90$, segue che $1,645 = c/\sqrt{23}$, e perciò $c = 7,889$.

Esercizio D. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione $\mathcal{N}(\mu,\ \sigma^2)$. Allora,

$$\mathsf{P}(X \le 38) = \mathsf{P}\left(\mathcal{N}(0,\ 1) \le \frac{38-\mu}{\sigma}\right) = 0,5438,$$

e

$$\mathsf{P}(X > 32) = \mathsf{P}\left(\mathcal{N}(0,\ 1) > \frac{32-\mu}{\sigma}\right) = 0,7704.$$

Perciò, considerando che $\mathsf{P}(\mathcal{N}(0,\ 1) \le 0,11) = 0,5438$ e che $\mathsf{P}(\mathcal{N}(0,\ 1) > -0,74) = 0,7704$ possiamo considerare il sistema di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} 0,11 = \dfrac{38-\mu}{\sigma} \\[2ex] -0,74 = \dfrac{32-\mu}{\sigma} \end{cases}$$

da cui si ricava $\mu = 37,22$ e $\sigma = 7,06$.

Esercizio E. Indicando con X lo stipendio mensile (in euro) degli impiegati del settore bancario si ha che $X \sim \mathcal{N}(\mu,\ \sigma^2)$.

a) Considerando che $\mathsf{P}(X < 950) = 0,2$ e che $\mathsf{P}(X > 1500) = 0,15$, si può scrivere

$$\mathsf{P}\left(\mathcal{N}(0,\ 1) < \frac{950-\mu}{\sigma}\right) = 0,2 \quad \text{e} \quad \mathsf{P}\left(\mathcal{N}(0,\ 1) > \frac{1500-\mu}{\sigma}\right) = 0,15,$$

per cui

$$-0,84\sigma = 950 - \mu \quad \text{e} \quad 1,04\sigma = 1500 - \mu,$$

da cui si ricava $\mu = 1195,74$ e $\sigma = 292,55$;

b) la probabilità che questo impiegato prenda più di € 1750 è data da

$$\mathsf{P}(X > 1750) = \mathsf{P}\left(\mathcal{N}(0,\ 1) > \frac{1750 - 1195,74}{292,55}\right) = 1 - 0,9706 = 0,0294.$$

Esercizio F. Indicando con X la statura (in centimetri) degli abitanti della regione in questione, $X \sim \mathcal{N}(170,\ 234)$.

a) La probabilità che un individuo estratto a caso sia alto più di 180 centimetri è pari a:

$$\mathsf{P}(X > 180) = \mathsf{P}\left(\mathcal{N}(0,\ 1) > \frac{180-170}{\sqrt{234}}\right) = 1 - 0,7422 = 0,2578.$$

b) La probabilità che un individuo sia alto più di 175 centimetri è pari a

$$p = \mathsf{P}(X > 175) = \mathsf{P}\left(\mathcal{N}(0,\ 1) > \frac{175-170}{\sqrt{234}}\right) = 1 - 0,6293 = 0,3707.$$

Perciò, indicando con Y il numero di individui, tra i 10 estratti, alti più di 175 centimetri, la probabilità richiesta è data da

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(Y \geq 2) &= 1 - \mathsf{P}(Y < 2) = 1 - \mathsf{P}(Y = 0) - \mathsf{P}(Y = 1) \\
&= 1 - \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10} - \binom{10}{1} p^1 (1-p)^9 \\
&= 1 - (1 - 0,3707)^{10} - 10 \cdot 0,3707(1 - 0,3707)^9 = 0,9329.
\end{aligned}$$