Marco Minozzo e Annamaria Guolo
Laurea in Economia del Commercio Internazionale
Laurea in Economia e Amministrazione delle Imprese
Università degli Studi di Verona (sede di Vicenza)

---

# Calcolo delle Probabilità
# Soluzioni 4. Probabilità condizionata, indipendenza, Teorema di Bayes

## Introduzione

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

**Probabilità condizionata.** Se $A$ e $B$ sono due eventi dello spazio campionario $\Omega$ (appartenenti ad $\mathcal{A}$) e $\mathsf{P}(A) > 0$, allora la *probabilità condizionata* di $B$ dato $A$ è definita come

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(A)}.$$

La probabilità condizionata $\mathsf{P}(B|A)$ soddisfa le seguenti tre proprietà:
i) $\mathsf{P}(A|A) = 1$;
ii) $\mathsf{P}(B|A) \geq 0$;
iii) data una successione di eventi $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}$ a due a due incompatibili, si ha $\mathsf{P}(B_1 \cup B_2 \cup \ldots |A) = \mathsf{P}(B_1|A) + \mathsf{P}(B_2|A) + \cdots$.

**Legge del prodotto.** Dati $k$ eventi $A_1, A_2, \ldots, A_k$, si ha

$$\mathsf{P}(A_k \cap A_{k-1} \cap \ldots \cap A_1) = \mathsf{P}(A_k|A_{k-1} \cap \ldots \cap A_1) \cdot \mathsf{P}(A_{k-1}|A_{k-2} \cap \ldots \cap A_1) \cdot \mathsf{P}(A_2|A_1) \cdot \mathsf{P}(A_1).$$

INDIPENDENZA TRA EVENTI

**Indipendenza tra 2 eventi.** Due eventi $A$ e $B$ dello spazio campionario $\Omega$ (appartenenti ad $\mathcal{A}$) si dicono *indipendenti* se

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B).$$

Valgono le seguenti relazioni di equivalenza

$$\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B) \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B).$$

**Indipendenza fra 3 eventi.** Tre eventi $A_1$, $A_2$ e $A_3$ dello spazio campionario $\Omega$ (appartenenti ad $\mathcal{A}$) si dicono *indipendenti* se
i) sono a due a due indipendenti;
ii) $\mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathsf{P}(A_1)\mathsf{P}(A_2)\mathsf{P}(A_3)$.

**Indipendenza fra $n$ eventi.** Gli eventi $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ dello spazio campionario $\Omega$ (appartenenti ad $\mathcal{A}$) si dicono *(globalmente) indipendenti* se per ogni sottoinsieme di $k$ eventi vale la relazione

$$\mathsf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_k}) = \mathsf{P}(A_{i_1})\mathsf{P}(A_{i_2}) \cdots \mathsf{P}(A_{i_k}).$$

FORMULA DI BAYES

**Partizione.** Un insieme di $k$ eventi $C_1, C_2, \ldots C_k$ costituiscono una *partizione* dello spazio campionario $\Omega$ se (appartenenti ad $\mathcal{A}$) si dicono *indipendenti* se:

i) $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k = \Omega$;

ii) $C_i \cap C_j = \emptyset$, per ogni $i \neq j$.

**Legge delle probabilità totali.** Sia $C_1, C_2, \ldots C_k$ una *partizione* dello spazio campionario $\Omega$ e sia $A$ un evento, allora

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathsf{P}(A|C_i)\mathsf{P}(C_i).$$

**Formula di Bayes.** Sia $C_1, C_2, \ldots C_k$ una *partizione* dello spazio campionario $\Omega$ e sia $A$ un evento, allora per ogni evneto $C_i$ si ha

$$\mathsf{P}(C_i|A) = \frac{\mathsf{P}(C_i \cap A)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(A|C_i)\mathsf{P}(C_i)}{\sum_{j=1}^{k} \mathsf{P}(A|C_j)\mathsf{P}(C_j)}.$$

INDIPENDENZA CONDIZIONATA

**Indipendenza condizionata tra 2 eventi.** Dati tre eventi $A$, $B$ e $C$ dello spazio campionario $\Omega$ (appartenenti ad $\mathcal{A}$) si dice che $A$ e $B$ sono *condizionatamente indipendenti* dato $C$ se

$$\mathsf{P}(A \cap B|C) = \mathsf{P}(A|C)\mathsf{P}(B|C).$$

L'indipendenza condizionata tra due eventi $A$ e $B$, dato $C$, non implica che questi siano anche (incondizionatamente) indipendenti, cioè che valga la relazione $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$.

**Esercizio A.** Sia $D = B \cup C$. Considerando che $A \cap D = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(A \cup B \cup C) &= \mathsf{P}(A \cup D) \\
&= \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(D) - \mathsf{P}(A \cap D) \\
&= \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B \cup C) - \mathsf{P}\left[(A \cap B) \cup (A \cap C)\right] \\
&= \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(C) - \mathsf{P}(B \cap C) \\
&\quad - \left[\mathsf{P}(A \cap B) + \mathsf{P}(A \cap C) - \mathsf{P}(A \cap B \cap C)\right] \\
&= \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) + \mathsf{P}(C) - \mathsf{P}(A \cap B) \\
&\quad - \mathsf{P}(A \cap C) - \mathsf{P}(B \cap C) + \mathsf{P}(A \cap B \cap C).
\end{aligned}$$

**Esercizio B.** Si indichi con $\Omega$ l'insieme dei punti interni al cerchio e con $r$ il raggio del cerchio. Si indichi inoltre con $A$ l'insieme dei punti interni al cerchio concentrico al primo avente raggio pari a $r/2$. Siccome $A$ consta esattamente di quei punti di $\Omega$ che sono più vicini al centro che alla circonferenza, allora

$$p = \mathsf{P}(A) = \frac{\text{area di } A}{\text{area di } \Omega} = \frac{\pi \cdot (r/2)^2}{\pi \cdot r^2} = 1/4.$$

**Esercizio C. a)** Si definiscano gli eventi $A = \{$si presenta "testa" in tutti i lanci$\}$, $B = \{$si presenta "testa" al primo lancio$\}$ e $C = \{$si presenta almeno una "testa"$\}$.
(i) La probabilità condizionata di $A$ dato $B$ è data da

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{1/8}{1/2} = 1/4.$$

(ii) La probabilità condizionata di $A$ dato $C$ è data da

$$\mathsf{P}(A|C) = \frac{\mathsf{P}(A \cap C)}{\mathsf{P}(C)} = \frac{1/8}{7/8} = 1/7.$$

**b)** (i) Siccome $\mathsf{P}(A) = 1/2$, $\mathsf{P}(B) = 1/2$ e $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(\{C, C, T\}, \{T, C, C\}) = 1/4$, essendo $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)$, allora $A$ e $B$ sono indipedenti.
(ii) Siccome $\mathsf{P}(A) = 1/2$, $\mathsf{P}(B) = 3/8$ e $\mathsf{P}(A \cap B) = 1/4$, essendo $\mathsf{P}(A \cap B) \neq \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)$, allora $A$ e $B$ non sono indipedenti.
**c)** Siccome

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(A) = (1/2) \cdot (1/3) + (1/2) \cdot (3/4) = 13/24, \\
&\mathsf{P}(B) = (1/2) \cdot (2/3) \cdot (1/3) + (1/2) \cdot (1/3) \cdot (3/4) + (1/2) \cdot (1/4) \cdot (2/3) + (1/2) \cdot (3/4) \cdot (1/4) = 119/288, \\
&\mathsf{P}(A \cap B) = (1/2) \cdot (1/3) \cdot (3/4) + (1/2) \cdot (3/4) \cdot (1/4) = 7/32,
\end{aligned}$$

essendo $\mathsf{P}(A \cap B) \neq \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)$, allora $A$ e $B$ non sono indipedenti.

**Esercizio D.** Si denoti con $T = \{$il test è positivo$\}$ e con $A = \{$il soggetto ha l'AIDS$\}$. Si richiede $\mathsf{P}(A|T)$. Per il Teorema di Bayes si ha:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(A|T) &= \frac{\mathsf{P}(T|A) \cdot \mathsf{P}(A)}{\mathsf{P}(T|A) \cdot \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(T|\overline{A}) \cdot \mathsf{P}(\overline{A})} \\
&= \frac{0,99 \cdot (1/10000)}{0,99 \cdot (1/10000) + 0,05 \cdot (9999/10000)} \simeq 0,002.
\end{aligned}$$

**Esercizio E.** Posto $A = \{$la pallina proviene dall'urna $U_1\}$, $B = \{$la pallina proviene dall'urna $U_2\}$, $C = \{$la pallina proviene dall'urna $U_3\}$ e $R = \{$la pallina è rossa$\}$, si richiede $\mathsf{P}(A|R)$. Per il Teorema di Bayes

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(A|R) &= \frac{\mathsf{P}(A \cap R)}{\mathsf{P}(R)} \\ &= \frac{\mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(R|A)}{\mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(R|A) + \mathsf{P}(B) \cdot \mathsf{P}(R|B) + \mathsf{P}(C) \cdot \mathsf{P}(R|C)} \\ &= \frac{(1/3) \cdot (3/8)}{(1/3) \cdot (3/8) + (1/3) \cdot (2/3) + (1/3) \cdot (2/5)} = 45/173. \end{aligned}$$