Marco Minozzo e Annamaria Guolo

Laurea in Economia del Commercio Internazionale
Laurea in Economia e Amministrazione delle Imprese
Università degli Studi di Verona (sede di Vicenza)

Calcolo delle Probabilità

Soluzioni 5. Variabili aleatorie discrete: distribuzione di probabilità e funzione di ripartizione

Variabile aleatoria discreta. Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, una *variabile aleatoria* (v.a.) è una funzione $X(\omega)$ avente come dominio Ω e codominio la retta reale che soddisfa alla condizione di *misurabilità*, cioè tale che, per ogni $r \in \mathbf{R}$, l'insieme $\{\omega : X(\omega) \leq r\}$ appartiene ad $\mathcal{A}$.
Se l'insieme dei valori che la variabile può assumere è un insieme finito o un insieme infinito numerabile si parla di v.a. discreta.

Distribuzione di probabilità e funzione di ripartizione.
Per ciascun valore x che X può assumere definiamo la probabilità che esso si realizzi, $P(X = x)$. Ricaviamo in tal modo la *distribuzione di probabilità* di X. Da qui, definiamo la *funzione di ripatizione* di X in un punto x come

$$F_X(x) = P(X \leq x),$$

vale a dire come la probabilità associata ai valori minori od uguali a x, quindi alla somma delle probabilità associate alle osservazioni di valori minori o uguali a x. La funzione di ripartizione gode delle seguenti proprietà:

- per $x \to +\infty$ si ha che $F_X(x) \to 1$;
- per $x \to -\infty$ si ha che $F_X(x) \to 0$;
- $F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}) = P(X = x_i)$, per valori x_{i-1}, x_i tali che $x_{i-1} < x_i$;
- è una funzione monotona non decrescente;
- si rappresenta graficamente come una funzione a gradini.

Valore atteso e varianza.
Sia $p_x = P(X = x)$. Allora il valore atteso della v.a. discreta X è

$$E(X) = \sum_x x p_x$$

e la varianza è

$$Var(X) = \sum_x (x - E(X))^2 p_x.$$

Distribuzione Bernoulliana. La v.a. di Bernoulli è una v.a. discreta che descrive il verificarsi o meno di un evento, con probabilità di successo p. Sia $X \sim Ber(p)$. Allora X assume valore 1 con probabilità p e 0 con probabilità $1 - p$. Si ha che

$$P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}, \ x = 0, 1.$$

- La v.a. X è definita per $0 \leq p \leq 1$.
- Il valore atteso di X è pari a p.
- La varianza di X è pari a $p(1-p)$.

Distribuzione Binomiale. La v.a. Binomiale deriva dalla ripetizione, per n volte e nelle stesse condizioni, dello schema che origina la v.a. Bernoulliana. Essa esprime il numero X di volte in cui un evento di interesse si realizza nell'insieme di n ripetizioni indipendenti di un esperimento. Sia p la probabilità di successo dell'eventi, cioè della sua realizzazione. Allora $X \sim Bin(n,p)$. Si ha che

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},\ x = 0, 1, \ldots, n.$$

- Per $n = 1$, X coincide con $Ber(p)$.
- Il valore atteso di X è pari a np.
- La varianza di X e pari a $np(1-p)$.
- X è ottenibile come la somma di n v.a. $Ber(p)$ indipendenti.
- Se X_i, $i = 1, \ldots, m$, sono v.a. $Bin(n_i, p)$ indipendenti, allora $\sum_{i=1}^m X_i \sim Bin\left(\sum_{i=1}^m n_i, p\right)$.

Esercizio A. a) Lo spazio campionario è dato da

$$\Omega = \{(T,T,T),(T,T,C),(T,C,T),(T,C,C),(C,T,T),(C,T,C),(C,C,T),(C,C,C)\}.$$

Le probabilità richieste sono date da $\mathsf{P}(T,T,T) = (2/3)^3 = 8/27$, $\mathsf{P}(T,T,C) = \mathsf{P}(T,C,T) = \mathsf{P}(C,T,T) = (2/3)^2 \cdot (1/3) = 4/27$, $\mathsf{P}(T,C,C) = \mathsf{P}(C,T,C) = \mathsf{P}(C,C,T) = (2/3) \cdot (1/3)^2 = 2/27$, $\mathsf{P}(C,C,C) = (1/3)^3 = 1/27$.
b) La distribuzione di probabilità è data da

x	0	1	2	3
$\mathsf{P}(X=x)$	1/27	10/27	8/27	8/27

c) La funzione di ripartizione è data da

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ 1/27, & x \in [0,1), \\ 11/27, & x \in [1,2), \\ 19/27, & x \in [2,3), \\ 1, & x \in [3,+\infty), \end{cases}$$

Esercizio B. Lo spazio campionario è dato da $\Omega = \{(i,j) : i,j = 1,\ldots,6\}$; ad ogni evento elementare si attribuisce una probabilità pari a 1/36. La distribuzione di probabilità della variabile aleatoria X è data da

x	1	2	3	4	5	6
$\mathsf{P}(X=x)$	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

mentre la funzione di ripartizione della variabile aleatoria X è data da

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 1), \\ 11/36, & x \in [1,2), \\ 20/36, & x \in [2,3), \\ 27/36, & x \in [3,4), \\ 32/36, & x \in [4,5), \\ 35/36, & x \in [5,6), \\ 1, & x \in [6,+\infty). \end{cases}$$

La distribuzione di probabilità della variabile aleatoria Y è data da

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathsf{P}(Y=y)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

mentre la funzione di ripartizione della variabile aleatoria Y è data da

$[a,b)$	$(-\infty,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$	$[5,6)$	$[6,7)$
$F(y),\ y \in [a,b)$	0	1/36	3/36	6/36	10/36	15/36

$[a,b)$	$[7,8)$	$[8,9)$	$[9,10)$	$[10,11)$	$[11,12)$	$[12,+\infty)$
$F(y),\ y \in [a,b)$	21/36	26/36	30/36	33/36	35/36	1

La distribuzione di probabilità della variabile aleatoria W è data da

w	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathsf{P}(W=w)$	1/36	2/36	2/36	3/36	4/36	4/36	3/36	4/36

w	11	12	13	14	15	16	18
$\mathsf{P}(W=w)$	2/36	3/36	2/36	2/36	1/36	2/36	1/36

mentre la funzione di ripartizione della variabile aleatoria W è data da

$[a,b)$	$(-\infty,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$	$[5,6)$	$[6,7)$	$[7,8)$	$[8,9)$	$[9,10)$	$[10,11)$
$F(w),\ w\in[a,b)$	0	1/36	3/36	5/36	8/36	12/36	16/36	19/36	23/36

$[a,b)$	$[11,12)$	$[12,13)$	$[13,14)$	$[14,15)$	$[15,16)$	$[16,18)$	$[18,+\infty)$
$F(w),\ w\in[a,b)$	25/36	28/36	30/36	32/36	33/36	35/36	1

La distribuzione di probabilità della variabile aleatoria Z è data da

z	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14
$\mathsf{P}(Z=z)$	1/36	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	2/36	2/36	2/36

z	16	18	21	24	27	32	36	40	50	55	72
$\mathsf{P}(Z=z)$	2/36	1/36	2/36	2/36	2/36	1/36	2/36	2/36	1/36	2/36	1/36

mentre la funzione di ripartizione della variabile aleatoria Z è data da

$[a,b)$	$(-\infty,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$	$[5,6)$	$[6,7)$	$[8,10)$	$[10,12)$	$[12,14)$
$F(z),\ z\in[a,b)$	0	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	12/36	14/36	16/36

$[a,b)$	$[14,16)$	$[16,18)$	$[18,21)$	$[21,24)$	$[24,27)$	$[27,32)$	$[32,36)$	$[36,40)$
$F(z),\ z\in[a,b)$	18/36	20/36	21/36	23/36	25/36	27/36	28/36	30/36

$[a,b)$	$[40,50)$	$[50,55)$	$[55,72)$	$[72,+\infty)$
$F(z),\ z\in[a,b)$	32/36	33/36	35/36	1

Esercizio C. Indicando con X il numero dei componenti guasti, allora $X \sim \text{Bin}(20;\ 0,1)$. La probabilità che il sistema funzioni nel mese considerato è dunque pari a

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X\in\{0,1,2,3\}) &= \binom{20}{0}\cdot 0,1^0\cdot 0,9^{20}+\binom{20}{1}\cdot 0,1^1\cdot 0,9^{19}\\ &\quad+\binom{20}{2}\cdot 0,1^2\cdot 0,9^{18}+\binom{20}{3}\cdot 0,1^3\cdot 0,9^{17}=0,867.\end{aligned}$$

Esercizio D. a) Indicando con X il numero delle risposte corrette, allora $X \sim \text{Bin}(6;\ 1/4)$. La probabilità che lo studente superi l'esame rispondendo a caso è dunque pari a

$$\mathsf{P}(X\in\{4,5,6\})=\binom{6}{4}\cdot(1/4)^4\cdot(3/4)^2+\binom{6}{5}\cdot(1/4)^5\cdot(3/4)^1+\binom{6}{6}\cdot(1/4)^6\cdot(3/4)^0=0,0376.$$

b) Bisogna scegliere k in modo tale che si abbia $\mathsf{P}(X\ge k)\simeq 0,5$; utilizzando la funzione di ripartizione, si ottiene:

$$0,5\simeq\mathsf{P}(X\ge k)=1-\mathsf{P}(X<k)=1-\mathsf{P}(X\le k-1)=1-F(k-1),$$

e quindi bisogna scegliere k in modo tale che si abbia $F(k-1) \simeq 0,5$. Risulta:

$$F(1) = \binom{6}{0} \cdot (1/4)^0 \cdot (3/4)^6 + \binom{6}{1} \cdot (1/4)^1 \cdot (3/4)^5 = 0,5339,$$

pertanto $k-1=1$ e quindi $k=2$.

Esercizio E. Indicando con X il numero di figli maschi, allora $X \sim \text{Bin}(10;\ 0,5)$. Quindi:
a)

$$\mathsf{P}(X=5) = \binom{10}{5} \cdot (0,5)^5 \cdot (0,5)^5 = 252 \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{252}{1024} = 0,2461;$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(3 \leq X \leq 8) &= 1 - [\mathsf{P}(X=0) + \mathsf{P}(X=1) + \mathsf{P}(X=2) + \mathsf{P}(X=9) + \mathsf{P}(X=10)] \\
&= 1 - [2 \cdot (0,5^{10} + 10 \cdot 0,5^{10}) + 45 \cdot 0,5^{10}] \\
&= 1 - (67/2^{10}) = 0,9346.
\end{aligned}$$

Esercizio F. Indicando con X il numero di pezzi difettosi, allora $X \sim \text{Bin}(100;\ 0,02)$. Quindi:
a) $\mathsf{P}(X=0) = 0,98^{100} = 0,1326$;
b) $\mathsf{P}(X<3) = F(2) = 0,98^{100} + 100 \cdot 0,02 \cdot 0,98^{99} + 4950 \cdot 0,02^2 \cdot 0,98^{98} = 0,6767$.