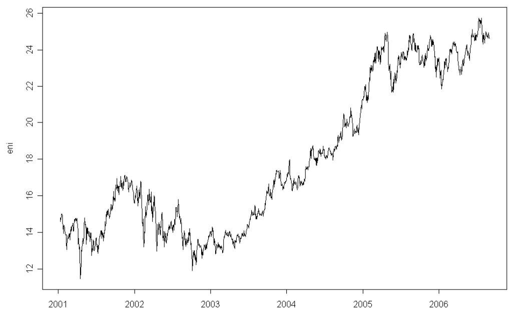
La distribuzione dei rendimenti

La forma di distribuzione dei rendimenti

Prezzi ENI 2001 – feb 2007

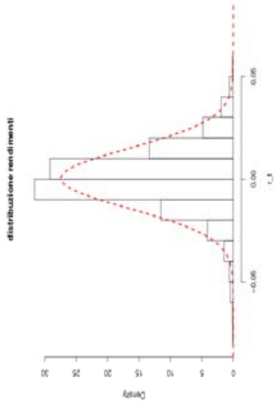


Serie dei "prezzi" con trend marcato. Questo rende difficile rispondere a quesiti statistici del tipo

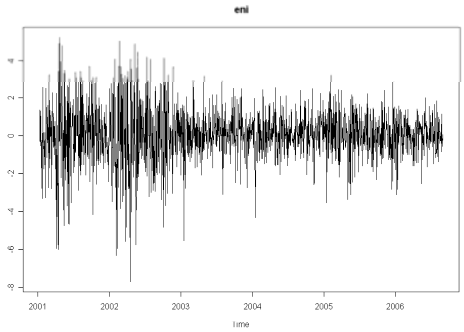
$$\Pr(P_t \leq x)$$

ossia qual è la probabilità che il livello dei prezzi abbia un certo valore x.

La forma di distribuzione dei rendimenti (2)



Rendimenti logaritmici



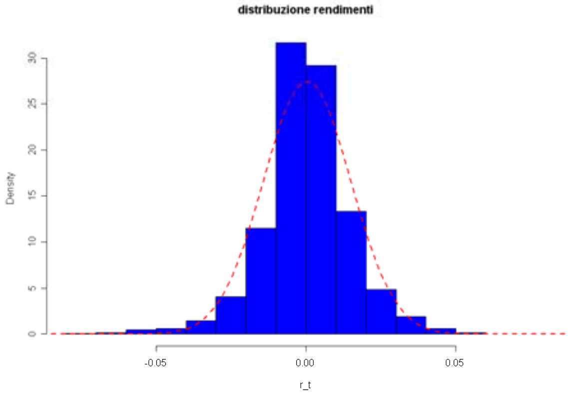
Come si distribuiscono marginalmente i rendimenti?
Sono simmetrici? Sono normali? Sono presenti valori anomali?
→studio della forma della distribuzione marginale delle frequenze relative.

Evidenze empiriche sulla distribuzione dei rendimenti

- I rendimenti relativi (e log) sono stazionari. Il loro livello, nel lungo periodo, non cambia nel tempo. Questo permette di studiare la distribuzione marginale (informazione temporale "persa").
- La media della distribuzione marginale dei rendimenti è vicina a 0 (nei prezzi cambia nel tempo per l'effetto del trend).
- La varianza della distribuzione marginale è piccola se misuro i rendimenti relativi nell'unità di misura "tradizionale". Varianza grande se moltiplico per 100. Dipende anche dalla frequenza con cui si osservano i rendimenti.

La forma di distribuzione dei rendimenti (3)

Titolo: ENI



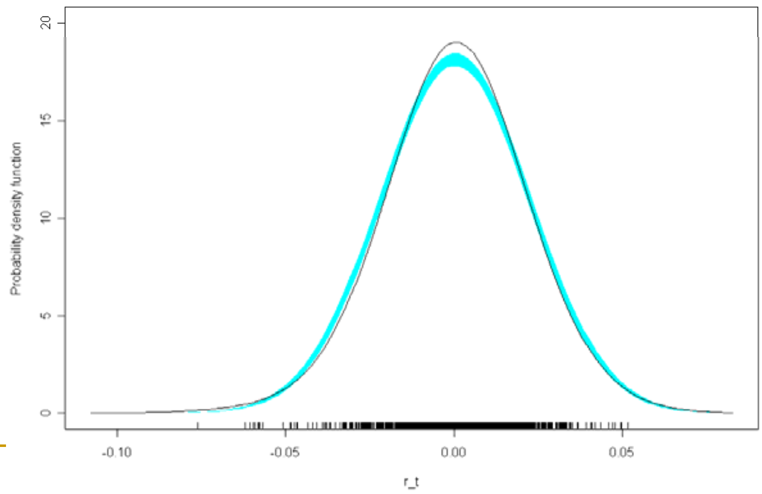
Significato della eventuale simmetria e della eventuale normalità.
Primi lavori empirici (Mandelbrot, 1963; Fama, 1965) escludono la normalità.
Istogramma dei rendimenti

-Code più "pesanti" della normale
-Valori centrali più frequenti della normale

Leptocurtosi

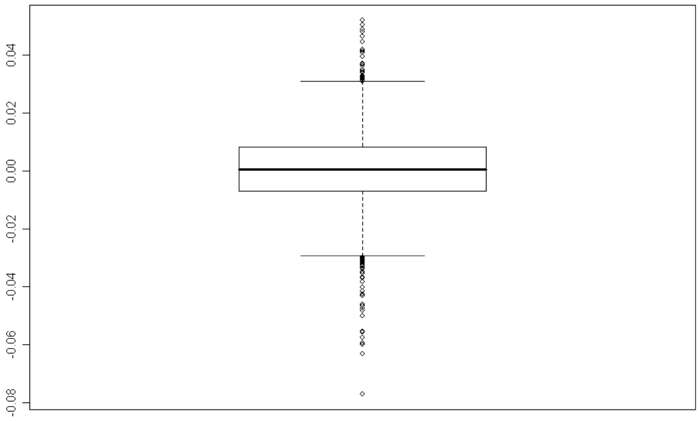
La forma di distribuzione dei rendimenti (4)

Stima non parametrica della distribuzione di frequenze (ENI)



La forma di distribuzione dei rendimenti (5)

Box-plot dei rendimenti (ENI)



Ipotesi Gaussiana dei rendimenti

Se vale la Gaussianità dei rendimenti, allora

$$\Pr(r_t \le x) = F_r(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

dove l'integrando è la densità di una Gaussiana standardizzata

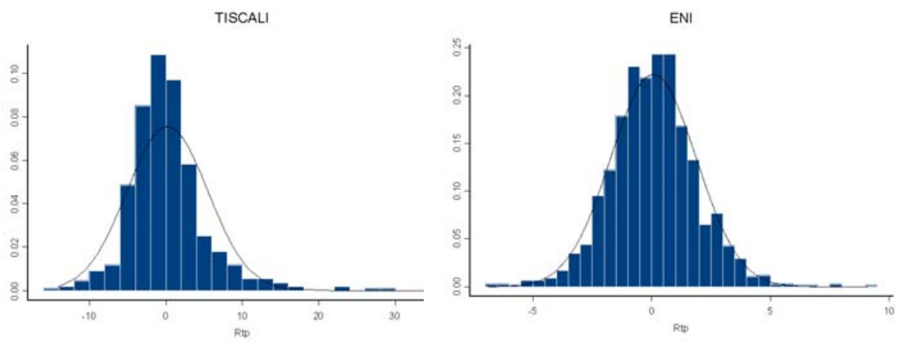
$$f_r(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

La Gaussiana standardizzata ha media 0 e varianza 1.
Esempio di calcolo di probabilità

$$\Pr(-1 \le r_t \le 2) = F_r(2) - F_r(-1) = 0.9772 - 0.1586 \approx 81.8\%$$

Rilevanza dello studio della distribuzione dei rendimenti

Determinazione del rischio dell'investimento
Distribuzione rendimenti Tiscali (27 ottobre 1999 – 14 gennaio 2002) confrontata con Eni nello stesso periodo



Rilevanza dello studio della distribuzione dei rendimenti (2)

- Informazione macroeconomica sui fattori che influenzano i mercati finanziari; Ad esempio, simmetria = controbilanciamento orso/toro.
- Implicazioni sui modelli finanziari per la determinazione dei prezzi (CAPM); varianza stimatore adeguato del rischio solo per certe forme distributive.
- Previsione dei prezzi in base alla conoscenza del processo generatore.

Indici e test per la valutazione analitica della forma distributiva

- **Indice di asimmetria di Fisher**

$$\gamma_1 = \frac{{}_M\mu_3}{\sigma^3}$$

con

$${}_M\mu_s = \frac{\sum_{t=1}^{T}(r_t - \bar{r})^s}{T}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T}(r_t - \bar{r})^2}{T}}$$

Asimmetria positiva o negativa se maggiore o minore di zero.

Indici e test per la valutazione analitica della forma distributiva (2)

-**Indice di curtosi**

$$\beta_2 = \frac{{}_M\mu_4}{{}_M\mu_2^2}$$

Normale → curtosi = 3
Platicurtica → curtosi < 3
Leptocurtica → curtosi > 3

- **Test di Jarque-Bera**

$$JB = \frac{T}{6}\left[\gamma_1^2 + \frac{1}{4}(\beta_2 - 3)^2\right]$$

NB. Il test JB “combina” gli indici di simmetria e curtosi in un’unica formula.

Valore atteso di trasformazioni lineari di variabili aleatorie (v.a.)

Dato un numero reale a, il valore atteso del numero è uguale al numero stesso, cioè

$$E(a) = a$$

Diversamente, date due v.a. X e Y e due numeri reali qualsiasi a e b

$$E(aX + bY) = E(aX) + E(bY) = aE(X) + bE(Y),$$

cioè la media di una combinazione lineare di v.a. è uguale alla combinazione lineare delle medie stesse.
Osservazione: questo risultato vale per ogni "livello di correlazione" tra le variabili. Cioè non dipende dalla eventuale correlazione delle v.a. X e Y.

Proprietà della varianza di una v.a.

Si ricordi che la varianza di una v.a. può essere scritta in termini di valore atteso, cioè avendo una v.a. X_1 con media μ_1

$$var(X_1) = E\big(X_1 - E(X_1)\big)^2 = E\big(X_1 - \mu_1\big)^2$$

siano dati due numeri reali a e b. Allora :

$$\begin{aligned} var(a + bX_1) &= E\big(a + bX_1 - E(a + bX_1)\big)^2 = E(a + bX_1 - a - b\mu_1)^2 \\ &= E(b(X_1 - \mu_1))^2 \\ &= b^2 E(X_1 - \mu_1)^2 = b^2 var(X_1). \end{aligned}$$

Covarianza di v.a.

Anche la covarianza di due v.a. può essere scritta in termini di valore atteso

$$\begin{aligned} cov(X_1, X_2) &= E\Big[\big(X_1 - E(X_1)\big)\big(X_2 - E(X_2)\big)\Big] \\ &= E\Big[\big(X_1 - \mu_1\big)\big(X_2 - \mu_2\big)\Big] \end{aligned}$$

Le v.a. X_1 e X_2 hanno media μ_1 e μ_2. Siano a e b numeri reali qualsiasi. La covarianza si ottiene come

$$\begin{aligned} cov(aX_1, bX_2) &= E\Big[(aX_1 - a\mu_1)(bX_2 - b\mu_2)\Big] \\ &= E\Big[(a(X_1 - \mu_1)b(X_2 - \mu_2))\Big] \\ &= abE\Big[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)\Big] \\ &= ab\; cov(X_1, X_2). \end{aligned}$$

Varianza di una combinazione di 2 v.a.

Nel caso della varianza della combinazione lineare di due v.c. otteniamo che:

$$\begin{aligned} var(aX_1 + bX_2) &= E\big((aX_1 + bX_2) - (a\mu_1 + b\mu_2)\big)^2 \\ &= E\big((a(X_1 - \mu_1) + b(X_2 - \mu_2)\big)^2 \\ &= E\big((a^2(X_1 - \mu_1)^2 + b^2(X_2 - \mu_2)^2 \\ &+ 2ab(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)\big) \\ &= a^2 var(X_1) + b^2 var(X_2) + 2ab\; cov(X_1, X_2). \end{aligned}$$

Ad esempio se $a = 1$, $b = -1$ e le variabili sono incorrelate (cioè $cov(X_1, X_2) = 0$) otteniamo immediatamente che:

$$var(X_1 - X_2) = var(X_1) + var(X_2).$$

Trasformazione lineare di v.a. Gaussiane indipendenti

Teorema: siano $X_1, \ldots, X_n$ v.a. Gaussiane indipendenti e $c_1, \ldots, c_n$ dei numeri reali. La v.a. $Y = \sum_{i=1}^n c_i X_i$ è una v.a. Gaussiana distribuita come segue

$$Y = \sum_{i=1}^n c_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n c_i \mu_i, \sum_{i=1}^n c_i^2 \sigma_i^2\right).$$

Osservazione. Sia dato un insieme di variabili casuali con distribuzione Gaussiana $X_1, \ldots, X_n$. Le variabili $X_1, \ldots, X_n$ sono tra loro indipendenti se e solo se sono incorrelate. Questo risultato è vero solo nel caso Gaussiano

Trasformazione quadratica di v.a. Gaussiane

Definizione. Siano

$$Z_1, Z_2, \cdots, Z_g$$

v.a. indipendenti con distribuzione normale standardizzata, cioè:

$$Z_i \sim N(0,1) \qquad i = 1, 2, \ldots, g,$$

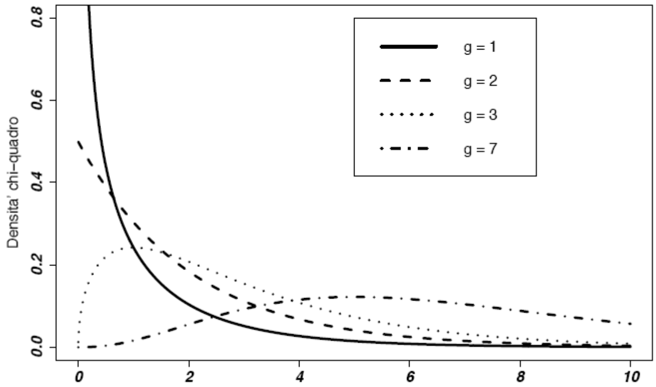
la v.a. Y definita come somma dei quadrati delle precedenti v.a.:

$$Y = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_g^2$$

presenta una distribuzione detta "chi quadrato" con g gradi di libertà e si indica con il simbolo $\chi^2(g)$ oppure con il simbolo χ_g^2 .

Densità della variabile χ^2(g)

La v.a. χ^2 è funzione dei gradi di libertà g. Vi è dunque una v.a. χ^2 per $g = 1$, un'altra per $g = 2$ etc.... All'aumentare di g la v.a. χ^2 presenta una forma distributiva che diventa sempre meno asimmetrica.



Principali caratteristiche della v.a. χ^2(g)

1. Assume valori tra 0 e $+\infty$;
2. la media (*Expectation* E) e la varianza (*var*) sono, rispettivamente

$$E(\chi^2_g) = g \qquad var(\chi^2_g) = 2g;$$

3. se $g \to \infty$ la v.c.

$$\frac{\chi^2_g - E(\chi^2_g)}{\sqrt{var(\chi^2_g)}} \sim N(0,1)$$

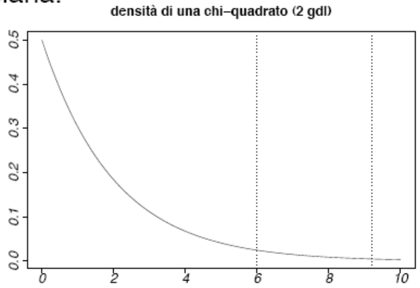
   in virtù del teorema limite centrale;
4. la somma di N v.c. indipendenti χ^2 ha anch'essa una distribuzione χ^2 con un numero di gradi di libertà uguale alla somma dei gradi di libertà delle N v.c. originarie.

Distribuzione asintotica di JB e commenti

Sotto l'ipotesi nulla di normalità di R_t il test JB è χ^2:

$$H_0 : R_t \sim N(0,1) \quad \text{se } H_0 \text{ è vera } JB \sim \chi^2(2)$$

Il valore numerico di JB va confrontato con i quantili di una $\chi^2(2)$. Il 95^o quantile è circa 6 e il 99^o è circa 9.2.
Quindi, se $JB > 6$ è poco probabile che la serie sia Gaussiana. Se $JB > 9.2$ è praticamente certo che la serie non è Gaussiana.



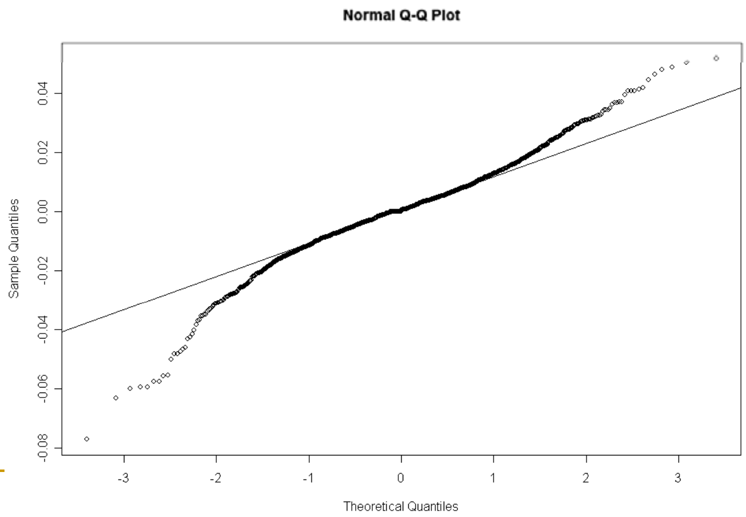
Calcolo delle statistiche analitiche

STATISTICHE	ENI	PETROLIO	EUR/DOLL	TISCALI	MIB30
mediana	0.0007	0.0000	0.0002	-0.0036	0.0005
media	0.0006	0.0001	0.0003	0.0005	0.0005
Dev.St.	0.0180	0.0318	0.0069	0.0510	0.0159
min	-0.0711	-0.2747	-0.0236	-0.1514	-0.0811
max	0.0871	0.2575	0.0255	0.3064	0.0777
Campo.di.variaz.	0.1582	0.5322	0.0491	0.4578	0.1588
scarto.interq.	0.0217	0.0198	0.0079	0.0508	0.0181
gamma1	0.0487	-0.0406	-0.2401	1.2093	-0.1646
beta2	4.2274	15.2478	3.7554	8.0792	5.3514
Jarque-Bera	95.6309	11469.8644	26.3408	735.8075	355.6308

Euro/dollaro: 5 gennaio 1999 – 14 gennaio 2002
Petrolio: 2 gennaio 1995 – 14 gennaio 2002

Rendimenti positivi e negativi tendono a compensarsi.
Asimmetria positiva per Tiscali. Confronto variabilità-volatilità.
Leptocurtosi. Per JB valori > 6 portano al rifiuto di H_0 al 5%.

Una rappresentazione grafica: il Q-Q plot (ENI)



Alcuni commenti finali

- Vari studi mostrano che le serie storiche dei rendimenti finanziari hanno densità con code più pesanti della normale e con picchi intorno allo zero molto più elevati.
- Interpretazione finanziaria: rendimenti molto piccoli o molto grandi si presentano con frequenze superiori a quelle di una normale.
- Studio dei rendimenti a cadenza superiore a quella giornaliera (dati infragiornalieri) → la leptocurtosi si riduce
- Studio della distribuzione dei rendimenti divisi per la radice quadrata dei volumi → la leptocurtosi si riduce (ruolo dei volumi nella determinazione dei prezzi e collegamento con l'analisi tecnica)