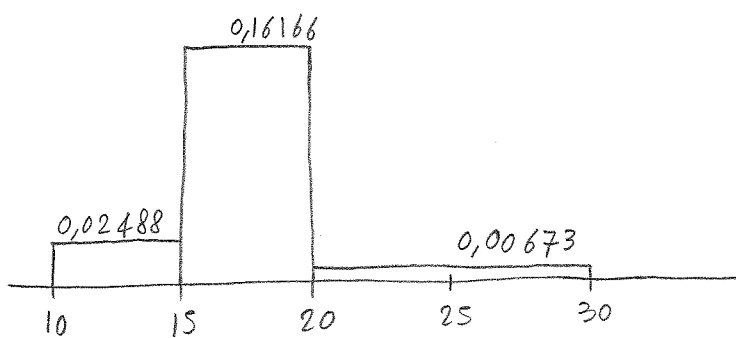


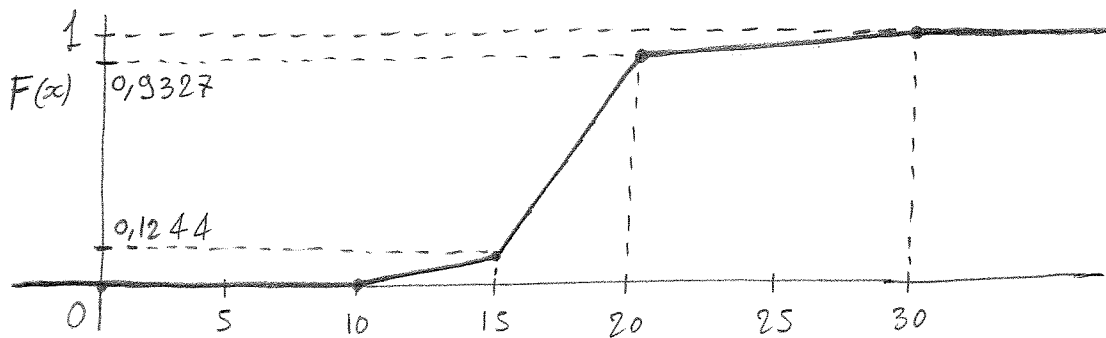
Esercizio A: a) Per ottenere l'istogramma di Frequenza, organizziamo i calcoli nella seguente tabella:

	a)					b)
	n_i	d_i	P_i	h_i	H_i	P_i
10-15	24	5	0,1244	0,02488	4,8	0,1244
15-20	156	5	0,8083	0,16166	31,2	0,9327
20-30	13	10	0,0673	0,00673	1,3	1
	193		1			

per questo istogramma abbiamo usato le densità relative h_i ; avremmo potuto usare le densità assolute H_i ;



b) La Funzione di ripartizione si può disegnare dopo aver ottenuto le Frequenze relative cumulate P_i :



c) Per determinare la mediana, dobbiamo prima individuare la classe mediana che è la classe 15-20. Quindi:

$$\begin{aligned}
 m_e &= C_{i-1} + \frac{d_i}{P_i} (0,5 - P_{i-1}) \\
 &= 15 + \frac{20-15}{0,8083} (0,5 - 0,1244) = 17,3234.
 \end{aligned}$$

Esercizio B: 2) Per interpolare la serie dei passeggeri (y) rispetto al tempo (x) con il metodo dei minimi quadrati con la Funzione $y = b_0 + b_1 x^2$ è utile organizzare i calcoli in una tabella:

②

20/9/2007

	y_i	x_i	$z_i = x_i^2$	z_i^2	$z_i y_i$
1998	52,5	1	1	1	52,5
1999	48,7	2	4	16	194,8
2000	41,3	3	9	81	371,7
2001	30,2	4	16	256	483,2
	172,7		30	354	1102,2

$$n = 4$$

$$m_z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i = \frac{30}{4} = 7,5$$

$$m_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{172,7}{4} = 43,173$$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2 - (m_z)^2 = \frac{354}{4} - (7,5)^2 = 32,25$$

$$\sigma_{zy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i y_i - m_z m_y = \frac{1102,2}{4} - 7,5 \cdot 43,173 = -48,26$$

$$b_1 = \frac{\sigma_{zy}}{\sigma_z^2} = \frac{-48,26}{32,25} = -1,4965$$

$$\begin{aligned} b_0 &= m_y - b_1 m_z \\ &= 43,173 - (-1,4965) \cdot 7,5 \\ &= 54,3988 \end{aligned}$$

b) Un indice di adattamento è dato da r^2 :

y_i^2
2756,25
2371,69
1705,69
912,04
7745,67

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - (m_y)^2 = \frac{7745,67}{4} - (43,173)^2 \\ &= 72,34 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{\sigma_{zy}^2}{\sigma_z^2 \sigma_y^2} = \frac{(-48,26)^2}{32,25 \cdot 72,34} \\ &= 0,99846 \end{aligned}$$

Esercizio C: a) La serie degli indici a base fissa, a base mobile, e la serie delle variazioni relative sono date rispettivamente da:

③

20/3/2007

2000	2001	2002	2003	2004
$\frac{3453}{6987} = 0,4942$	$\frac{5234}{6987} = 0,7491$	$\frac{6987}{6987} = 1$	$\frac{8231}{6987} = 1,1780$	$\frac{9619}{6987} = 1,3767$
—	$\frac{5234}{3453} = 1,5158$	$\frac{6987}{5234} = 1,3349$	$\frac{8231}{6987} = 1,1780$	$\frac{9619}{8231} = 1,1686$
—	$1,5158 - 1 = 0,5158$	$1,3349 - 1 = 0,3349$	$1,1780 - 1 = 0,1780$	$1,1686 - 1 = 0,1686$

b) la variazione media relativa dal 2000 al 2003 è data da:

$$\sqrt[3]{1,5158 \cdot 1,3349 \cdot 1,1780} - 1 = \sqrt[3]{2,3836} - 1 = 0,3358 \quad (+33,58\%)$$

Esercizio D: a) Trascurando il problema che le Frequenze assolute dovrebbero essere numeri interi, si ottiene:

F_{ij}					$F_{ij}^* = \frac{F_{i.} \cdot F_{.j}}{n}$			
Business	22,044	80,661	64,295	167		26,369	78,648	61,983
Economics	11,904	20,592	15,504	48		7,579	22,605	17,816
	33,948	101,253	79,799	215				

→ distribuzione marginale del voto di laurea

$\frac{(F_{ij} - F_{ij}^*)^2}{F_{ij}^*}$			
	0,70935	0,05154	0,08621
	2,46796	0,17931	0,29993
	3,7943		

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(F_{ij} - F_{ij}^*)^2}{F_{ij}^*} = 3,7943$$

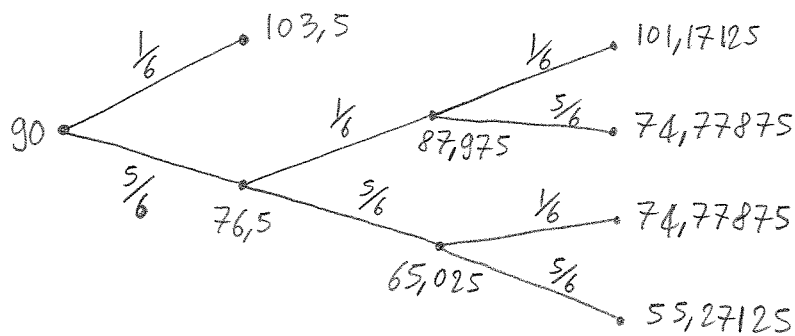
Un indice di dipendenza relativo è dato da:

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + N} \cdot \frac{K}{K-1}} = \sqrt{\frac{3,7943}{3,7943 + 215} \cdot \frac{2}{2-1}} = \sqrt{0,03468} = 0,18624,$$

dove $K = \min(r, c) = \min(2, 3) = 2$. Essendo che $C \in [0, 1]$, possiamo affermare che c'è un modesto grado di dipendenza.

Esercizio E1: a) L'albero degli eventi, completo con le probabilità condizionate sui rami, è il seguente, dove sui nodi è indicato il prezzo dell'azione:

(4)
20/9/2007



b) Le probabilità associate ad ogni evento elementare, ovvero ad ogni nodo terminale dell'albero, sono le seguenti ("+" = aumento, "-" = diminuzione):

ω	$P(\omega)$
+	$\frac{1}{6}$
- ++	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$
- + -	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$
- - +	$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$
- - -	$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$

†

c) Il valore atteso di X è dato da:

ω	$P(\omega)$	$X(\omega)$
+	$\frac{1}{6}$	103,5
- ++	$\frac{5}{216}$	101,17125
- + -	$\frac{25}{216}$	74,77875
- - +	$\frac{25}{216}$	74,77875
- - -	$\frac{125}{216}$	55,27125

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega) \\
 &= 103,5 \cdot \frac{1}{6} + 101,17125 \cdot \frac{5}{216} + \\
 &\quad + 74,77875 \cdot \frac{25}{216} + 74,77875 \cdot \frac{25}{216} + \\
 &\quad + 55,27125 \cdot \frac{125}{216} \\
 &= 68,8875
 \end{aligned}$$

d) La probabilità condizionata richiesta è data da:

$$\begin{aligned}
 P(<90 \mid 3gg) &= \frac{P(<90 \cap 3gg)}{P(3gg)} \\
 &= \frac{\frac{25}{216} + \frac{25}{216} + \frac{125}{216}}{1 - \frac{36}{216}} = \frac{\frac{175}{216}}{\frac{180}{216}} = 0,9722
 \end{aligned}$$

Esercizio E2: a) Per calcolare la probabilità che il soggetto prescelto sia una Femmina progressista è utile organizzare le numerosità come segue: (5) 20/9/2007

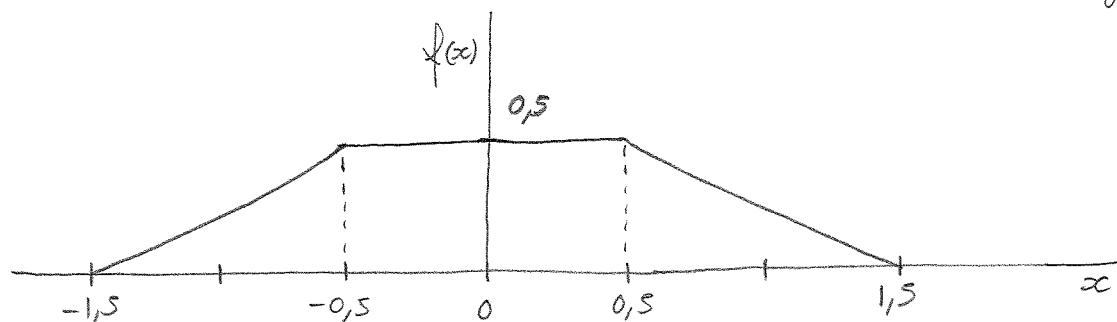
soggetti	Conservatori	Progressisti	
Maschi	12	12	24
Femmine	9	6	15
	21	18	39

$$P(F \cap P) = \frac{6}{39} = 0,1538$$

b) La risposta è data dalla seguente probabilità condizionata:

$$P(P|F) = \frac{6}{15} = 0,4$$

Esercizio F: a) Il grafico della Funzione di densità è il seguente:



b) La Funzione di ripartizione si ottiene per i diversi intervalli:

per $-1,5 < x < -0,5$:

$$F(x) = \int_{-1,5}^x (0,75 + 0,5t) dt = \left[0,75t + 0,5 \frac{t^2}{2} \right]_{-1,5}^x = 0,75x + 0,25x^2 + 1,125 - 0,5625$$

$$= 0,25x^2 + 0,75x + 0,5625$$

per $-0,5 < x < 0,5$:

$$F(x) = 0,25 + \int_{-0,5}^x 0,5 dt = 0,25 + \left[0,5t \right]_{-0,5}^x$$

$$= 0,25 + 0,5x + 0,25$$

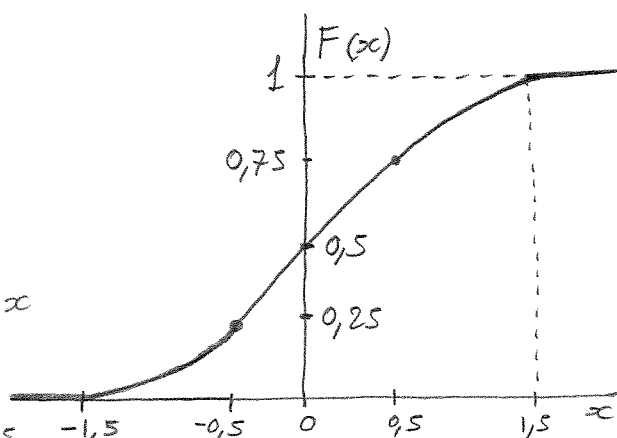
$$= 0,5x + 0,5$$

per $0,5 < x < 1,5$:

$$F(x) = 0,75 + \int_{0,5}^x (0,75 - 0,5t) dt = 0,75 + \left[0,75t - 0,5 \frac{t^2}{2} \right]_{0,5}^x$$

$$= 0,75 + 0,75x - 0,25x^2 - 0,375 + 0,0625 = -0,25x^2 + 0,75x + 0,4375$$

mentre $F(x) = 0$, per $x \leq -1,5$, e $F(x) = 1$, per $x \geq 1,5$.



Esercizio 6: a) Un intervallo di confidenza per la media μ_1 al 95% è dato da:

⑥
20/9/2007

$$\left[\bar{x} - t_{\alpha/2} \frac{s_1}{\sqrt{n_1}} ; \bar{x} + t_{\alpha/2} \frac{s_1}{\sqrt{n_1}} \right]$$

dove $\bar{x} = 10,3$, $n_1 = 9$, $s_1^2 = 13,8$, e $t_{\alpha/2} = 2,306$ è il percentile corrispondente ad $\alpha/2 = 0,025$ di una distribuzione t di Student con $n_1 - 1 = 8$ g.d.l. Quindi l'intervallo è dato da:

$$\left[10,3 - 2,306 \frac{\sqrt{13,8}}{\sqrt{9}} ; 10,3 + 2,306 \frac{\sqrt{13,8}}{\sqrt{9}} \right]$$

ovvero

$$[7,445 ; 13,155] .$$

b) In questa verifica di ipotesi abbiamo $n_1 = 9$, $n_2 = 11$, $s_1^2 = 13,8$, $s_2^2 = 3,6$, per cui:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{13,8}{3,6} = 3,833$$

← valore osservato della statistica test

mentre il percentile corrispondente ad $\alpha = 0,05$ di una distribuzione F di Snedecor con $n_1 - 1 = 8$ e $n_2 - 1 = 10$ g.d.l. è dato da $F_\alpha = 3,07$.

Perciò, essendo la regione di rifiuto data da $R = \{F: F > F_\alpha\}$, rifiutiamo H_0 in quanto $3,833$ appartiene alla regione di rifiuto.

c) Calcoliamo prima S^2 :

$$S^2 = \frac{S_1^2 (n_1 - 1) + S_2^2 (n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{13,8 (9 - 1) + 3,6 (11 - 1)}{9 + 11 - 2} = 8,133$$

e quindi il valore osservato della statistica test:

$$t_c = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{10,3 - 5,2}{\sqrt{8,133} \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{11}}} = \frac{5,1}{1,28181} = 3,978 .$$

Essendo il percentile corrispondente ad $\alpha/2 = 0,025$ di una distribuzione t di Student con $n_1 + n_2 - 2 = 18$ g.d.l. pari a $t_{\alpha/2} = 2,101$, ed essendo $R = \{t_c: |t_c| > t_{\alpha/2}\}$, rifiutiamo H_0 .