

Calcolo delle Probabilità

Soluzioni 6. Variabili aleatorie continue: funzione di densità e funzione di ripartizione

Esercizio A. a) Le probabilità richieste sono date da:

$$P(X < 1, 5) = F(1, 5) = 1 - e^{-3} = 0,9502;$$

$$P(X \geq 0, 5) = 1 - F(0, 5) = e^{-1} = 0,3679;$$

$$P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = e^{-2} - e^{-4} = 0,1170.$$

b) La funzione di densità della variabile aleatoria X è data da

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{d}{dx} F(x) = 2e^{-2x}, & x > 0. \end{cases}$$

Esercizio B. a) Le funzioni $f_X(x)$ ed $f_Y(y)$ sono in effetti funzioni di densità in quanto sono funzioni non negative, cioè, $f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ed $f_Y(y) \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}$, ed il loro integrale da $-\infty$ a ∞ è pari a 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_0^1 2x dx = [x^2]_0^1 = 1;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) dy = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[\int_0^{\alpha} e^{-y} dy \right] = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} [-e^{-y}]_0^{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{e^{\alpha}} \right) = 1.$$

b) Le funzioni di ripartizione delle variabili aleatorie X ed Y sono date da:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

e

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(t) dt = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1 - e^{-y}, & y \geq 0. \end{cases}$$

c) Le probabilità richieste sono date da:

$$(i) P(X > 0,75) = 1 - F_X(0,75) = 1 - (0,75)^2 = 0,4375;$$

$$(ii) P(0,2 \leq X < 0,5) = F_X(0,5) - F_X(0,2) = (0,5)^2 - (0,2)^2 = 0,21;$$

$$(iii) P(Y \geq 1,5) = 1 - F_Y(1,5) = 1 - (1 - e^{-1,5}) = e^{-1,5} = 0,2231;$$

$$(iv) P(-3 < Y \leq 2) = F_Y(2) - F_Y(-3) = 1 - e^{-2} = 0,8647.$$