

## Calcolo delle Probabilità

### Soluzioni 3. Spazi di probabilità

**Esercizio A. a)** Le probabilità richieste sono date da  $P(B_1) = 15/25 = 3/5$ ,  $P(B_2) = 3/5$ ,  $P(B_1 \cap B_2) = 9/25$ .

**b)** Le probabilità richieste sono date da  $P(B_1) = 12/20 = 3/5$ ,  $P(B_2) = 3/5$ ,  $P(B_1 \cap B_2) = 6/20 = 3/10$ .

**Esercizio B. a)** Posto  $A = \{(C, C), (T, C)\}$ , si ha  $P(A) = 1/2$ .

**b)** Posto

$$B_1 = \{(C_i, C_j) \in \Omega : C_i \text{ e } C_j \text{ appartengono ai "cuori"}\},$$

$$B_2 = \{(C_i, C_j) \in \Omega : C_i \text{ è un 3}\},$$

si richiede di calcolare la probabilità di  $B_1 \cup B_2$  la quale è data da

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) = \frac{13 \cdot 12}{52 \cdot 51} + \frac{4 \cdot 51}{52 \cdot 51} - \frac{1 \cdot 12}{52 \cdot 51} = \frac{348}{2652}.$$

**Esercizio C.** La probabilità richiesta è data da

$$P\{(r_1, \dots, r_{10}) : \text{nella 10-pla compaiono 5 "si" e 5 "no"}\} = 252/(2^{10}).$$

**Esercizio D.** Le probabilità richieste sono date da:  $P(A) = 3/12 = 1/4$ ;

$$P(B) = 8/12 = 2/3;$$

$$P(C) = 4/12 = 1/3;$$

$$P(A \cup B) = 10/12 = 5/6;$$

$$P(B \cap C) = P(C) = 1/3;$$

$$P(B - (A \cup C)) = 3/12 = 1/4.$$

**Esercizio E. a)** (i) Poichè la somma dei valori assunti dalla funzione  $P(\cdot)$  sugli eventi elementari dello spazio campionario è maggiore di 1, essa non definisce una funzione di probabilità su  $\Omega$ .

(ii) I valori assunti dalla funzione  $P(\cdot)$  sugli eventi elementari sono non negativi e la loro somma è pari a 1; perciò  $P(\cdot)$  definisce una funzione di probabilità su  $\Omega$ .

**b)** (i) Sia  $P(\{\omega_1\}) = p$ . Allora, affinché  $P(\cdot)$  sia una funzione di probabilità, la somma delle probabilità degli eventi elementari deve essere uguale a 1, cioè deve essere

$$p + 1/3 + 1/6 + 1/9 = 1,$$

e quindi  $p = 7/18$ .

(ii) Sia  $P(\{\omega_1\}) = p$ . Siccome

$$P(\{\omega_3\}) = P(\{\omega_2, \omega_3\}) - P(\{\omega_2\}) = 2/3 - 1/3 = 1/3,$$

$$P(\{\omega_4\}) = P(\{\omega_2, \omega_4\}) - P(\{\omega_2\}) = 1/2 - 1/3 = 1/6,$$

allora deve essere

$$p + 1/3 + 1/3 + 1/6 = 1,$$

e quindi  $p = 1/6$ .

**Esercizio F.** Si definiscano gli eventi  $A = \{\text{la persona è un maschio}\}$  e  $B = \{\text{la persona ha occhi scuri}\}$ . Si richiede di calcolare la probabilità  $P(A \cup B)$ . Allora, essendo  $P(A) = 10/30 = 1/3$ ,  $P(B) = 15/30 = 1/2$  e  $P(A \cap B) = 5/30 = 1/6$ , risulta

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/3 + 1/2 - 1/6 = 2/3.$$

**Esercizio G. a)** Sia  $P(\{1\}) = p$ ; allora  $P(\{j\}) = j \cdot p$ , per  $j = 1, \dots, 6$ . Siccome la somma delle probabilità degli eventi elementari deve essere pari a 1, si ottiene:

$$p \cdot \sum_{j=1}^6 j = 1,$$

e cioè  $p = 1/21$ . Pertanto  $P(\{1\}) = 1/21$ ,  $P(\{2\}) = 2/21$ ,  $P(\{3\}) = 3/21$ ,  $P(\{4\}) = 4/21$ ,  $P(\{5\}) = 5/21$  e  $P(\{6\}) = 6/21$ .

**b)** Le probabilità richieste sono date da  $P(A) = P(\{2, 4, 6\}) = 4/7$ ,  $P(B) = P(\{1, 2, 3, 5\}) = 11/21$  e  $P(C) = P(\{1, 3, 5\}) = 3/7$ .

**c)** (i) L'evento che si presenti un numero pari o un numero primo è  $A \cup B$  che coincide con l'intero spazio campionario, pertanto la probabilità di tale evento è pari a 1.

(ii) L'evento che si presenti un numero primo dispari è  $B \cap C = \{1, 3, 5\} = C$ , pertanto  $P(B \cap C) = 3/7$ .

(iii) L'evento che si verifichi  $A$  ma non  $B$  è  $A - B = \{4, 6\}$ , pertanto  $P(A - B) = 10/21$ .