

Calcolo delle Probabilità

Soluzioni 3. Spazi di probabilità

Esercizio A. a) Le probabilità richieste sono date da $P(B_1) = 15/25 = 3/5$, $P(B_2) = 3/5$, $P(B_1 \cap B_2) = 9/25$.

b) Le probabilità richieste sono date da $P(B_1) = 12/20 = 3/5$, $P(B_2) = 3/5$, $P(B_1 \cap B_2) = 6/20 = 3/10$.

Esercizio B. a) Posto $A = \{(C, C), (T, C)\}$, si ha $P(A) = 1/2$.

b) Posto

$$B_1 = \{(C_i, C_j) \in \Omega : C_i \text{ e } C_j \text{ appartengono ai "cuori"}\},$$

$$B_2 = \{(C_i, C_j) \in \Omega : C_i \text{ è un 3}\},$$

si richiede di calcolare la probabilità di $B_1 \cup B_2$ la quale è data da

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) = \frac{13 \cdot 12}{52 \cdot 51} + \frac{4 \cdot 51}{52 \cdot 51} - \frac{1 \cdot 12}{52 \cdot 51} = \frac{348}{2652}.$$

Esercizio C. La probabilità richiesta è data da

$$P\{(r_1, \dots, r_{10}) : \text{nella 10-pla compaiono 5 "si" e 5 "no"}\} = 252/(2^{10}).$$

Esercizio D. Le probabilità richieste sono date da: $P(A) = 3/12 = 1/4$;

$$P(B) = 8/12 = 2/3;$$

$$P(C) = 4/12 = 1/3;$$

$$P(A \cup B) = 10/12 = 5/6;$$

$$P(B \cap C) = P(C) = 1/3;$$

$$P(B - (A \cup C)) = 3/12 = 1/4.$$

Esercizio E. a) (i) Poichè la somma dei valori assunti dalla funzione $P(\cdot)$ sugli eventi elementari dello spazio campionario è maggiore di 1, essa non definisce una funzione di probabilità su Ω .

(ii) I valori assunti dalla funzione $P(\cdot)$ sugli eventi elementari sono non negativi e la loro somma è pari a 1; perciò $P(\cdot)$ definisce una funzione di probabilità su Ω .

b) (i) Sia $P(\{\omega_1\}) = p$. Allora, affinché $P(\cdot)$ sia una funzione di probabilità, la somma delle probabilità degli eventi elementari deve essere uguale a 1, cioè deve essere

$$p + 1/3 + 1/6 + 1/9 = 1,$$

e quindi $p = 7/18$.

(ii) Sia $P(\{\omega_1\}) = p$. Siccome

$$P(\{\omega_3\}) = P(\{\omega_2, \omega_3\}) - P(\{\omega_2\}) = 2/3 - 1/3 = 1/3,$$

$$P(\{\omega_4\}) = P(\{\omega_2, \omega_4\}) - P(\{\omega_2\}) = 1/2 - 1/3 = 1/6,$$

allora deve essere

$$p + 1/3 + 1/3 + 1/6 = 1,$$

e quindi $p = 1/6$.

Esercizio F. Si definiscano gli eventi $A = \{\text{la persona è un maschio}\}$ e $B = \{\text{la persona ha occhi scuri}\}$. Si richiede di calcolare la probabilità $\mathbf{P}(A \cup B)$. Allora, essendo $\mathbf{P}(A) = 10/30 = 1/3$, $\mathbf{P}(B) = 15/30 = 1/2$ e $\mathbf{P}(A \cap B) = 5/30 = 1/6$, risulta

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) = 1/3 + 1/2 - 1/6 = 2/3.$$

Esercizio G. a) Sia $\mathbf{P}(\{1\}) = p$; allora $\mathbf{P}(\{j\}) = j \cdot p$, per $j = 1, \dots, 6$. Siccome la somma delle probabilità degli eventi elementari deve essere pari a 1, si ottiene:

$$p \cdot \sum_{j=1}^6 j = 1,$$

e cioè $p = 1/21$. Pertanto $\mathbf{P}(\{1\}) = 1/21$, $\mathbf{P}(\{2\}) = 2/21$, $\mathbf{P}(\{3\}) = 3/21$, $\mathbf{P}(\{4\}) = 4/21$, $\mathbf{P}(\{5\}) = 5/21$ e $\mathbf{P}(\{6\}) = 6/21$.

b) Le probabilità richieste sono date da $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\{2, 4, 6\}) = 4/7$, $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\{1, 2, 3, 5\}) = 11/21$ e $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(\{1, 3, 5\}) = 3/7$.

c) (i) L'evento che si presenti un numero pari o un numero primo è $A \cup B$ che coincide con l'intero spazio campionario, pertanto la probabilità di tale evento è pari a 1.

(ii) L'evento che si presenti un numero primo dispari è $B \cap C = \{1, 3, 5\} = C$, pertanto $\mathbf{P}(B \cap C) = 3/7$.

(iii) L'evento che si verifichi A ma non B è $A - B = \{4, 6\}$, pertanto $\mathbf{P}(A - B) = 10/21$.