

Calcolo delle Probabilità

Soluzioni 8. Valore atteso, varianza e disuguaglianza di Tchebycheff

Esercizio A. a) Lo spazio campionario è dato da:

$$\Omega = \{(T), (C, T), (C, C, T), (C, C, C, T), (C, C, C, C, T), (C, C, C, C, C)\}.$$

b) La distribuzione di probabilità della variabile aleatoria N che conta il numero di lanci effettuati è data da:

$$P(N = 1) = P(T) = 1/2;$$

$$P(N = 2) = P(C, T) = 1/4;$$

$$P(N = 3) = P(C, C, T) = 1/8;$$

$$P(N = 4) = P(C, C, C, T) = 1/16;$$

$$P(N = 5) = P(C, C, C, C, T) + P(C, C, C, C, C) = (1/32) + (1/32) = 1/16.$$

c) Il numero atteso di lanci della moneta è dato da:

$$E(N) = 1 \cdot (1/2) + 2 \cdot (1/4) + 3 \cdot (1/8) + 4 \cdot (1/16) + 5 \cdot (1/16) = 1,94.$$

Esercizio B. b) Indicando con V l'evento che il giocatore vince una data partita e con \bar{V} l'evento che il giocatore non vince la partita, lo spazio campionario è dato da:

$$\Omega = \{(\bar{V}), (V, V, V), (V, \bar{V}, \bar{V}), (V, V, \bar{V}, V, V), (V, V, \bar{V}, V, \bar{V}), (V, V, \bar{V}, \bar{V}, V), (V, V, \bar{V}, \bar{V}, \bar{V}), (V, \bar{V}, V, V, V), (V, \bar{V}, V, V, \bar{V}), (V, \bar{V}, V, \bar{V}, V), (V, \bar{V}, V, \bar{V}, \bar{V})\}.$$

Agli eventi elementari sono associate le probabilità:

$$P(\bar{V}) = 3/4,$$

$$P(V, V, V) = 1/64,$$

$$P(V, \bar{V}, \bar{V}) = 9/64,$$

$$P(V, V, \bar{V}, V, V) = 3/1024,$$

$$P(V, V, \bar{V}, V, \bar{V}) = 9/1024,$$

$$P(V, V, \bar{V}, \bar{V}, V) = 9/1024,$$

$$P(V, V, \bar{V}, \bar{V}, \bar{V}) = 27/1024,$$

$$P(V, \bar{V}, V, V, V) = 3/1024,$$

$$P(V, \bar{V}, V, V, \bar{V}) = 9/1024,$$

$$P(V, \bar{V}, V, \bar{V}, V) = 9/1024,$$

$$P(V, \bar{V}, V, \bar{V}, \bar{V}) = 27/1024.$$

c) La probabilità che il giocatore smetta di giocare prima della quinta partita è data da

$$P(\bar{V}) + P(V, V, V) + P(V, \bar{V}, \bar{V}) = (3/4) + (1/64) + (9/64) = 58/64.$$

d) La probabilità richiesta è data da:

$$\begin{aligned} P(\text{non perdere} | 5 \text{ partite}) &= 1 - P(\text{perdere} | 5 \text{ partite}) \\ &= 1 - \frac{P(V, V, \bar{V}, \bar{V}, \bar{V}) + P(V, \bar{V}, V, \bar{V}, \bar{V})}{P(5 \text{ partite})} \\ &= 1 - \frac{52/1024}{6/64} = 1 - (9/16) = 7/16. \end{aligned}$$

e) La variabile aleatoria Y ha distribuzione di probabilità:

y	1	3	5
$P(Y = y)$	48/64	10/64	6/64

Il valore atteso e la varianza di Y sono quindi dati da:

$$\begin{aligned} E(Y) &= 1 \cdot (3/4) + 3 \cdot (10/64) + 5 \cdot (6/64) = 1,69, \\ \text{Var}(Y) &= 1^2 \cdot (3/4) + 3^2 \cdot (10/64) + 5^2 \cdot (6/64) - (1,69)^2 = 1,64. \end{aligned}$$

f) La variabile aleatoria X ha distribuzione di probabilità:

x	0	2	4
$P(X = x)$	966/1024	36/1024	22/1024

Pertanto valore atteso e varianza di X sono dati da:

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot (966/1024) + 2 \cdot (36/1024) + 4 \cdot (22/1024) = 0,16, \\ \text{Var}(X) &= 0^2 \cdot (966/1024) + 2^2 \cdot (36/1024) + 4^2 \cdot (22/1024) - (0,16)^2 = 0,46. \end{aligned}$$

g) Indicando con Z l'ammontare in yen in possesso del giocatore alla fine della serata, si ha $Z = 99 \cdot X$ e quindi

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(99 \cdot X) = 99 \cdot E(X) = 99 \cdot 0,16 = 15,84, \\ \text{Var}(Z) &= \text{Var}(99 \cdot X) = 99^2 \cdot \text{Var}(X) = 99^2 \cdot 0,46 = 4508,46. \end{aligned}$$

Esercizio C. Se $X \sim \text{Bin}(n, p)$, allora $\text{Var}(X) = np(1 - p)$. Per n fissato, basta trovare il valore di p che rende nulla la derivata prima rispetto a p di $\text{Var}(X)$:

$$\frac{d}{dp} \text{Var}(X) = 0 \Leftrightarrow n - 2np = 0 \Leftrightarrow p = 1/2,$$

perciò la varianza è massima per $p = 1/2$.

Esercizio D. Il valore atteso della variabile aleatoria X si ricava mediante integrazione per parti

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty x f_X(x) dx = \int_0^\infty x \cdot 2e^{-2x} dx = \left[x(-e^{-2x}) \right]_0^\infty - \int_0^\infty 1 \cdot (-e^{-2x}) dx \\ &= \left[-xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 1/2}{-e^{2x}} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

mentre per la varianza si ricava

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^\infty x^2 f_X(x) dx = \int_0^\infty x^2 \cdot 2e^{-2x} dx \\ &= \left[x^2(-e^{-2x}) \right]_0^\infty - \int_0^\infty 2x(-e^{-2x}) dx = \left[-x^2e^{-2x} \right]_0^\infty + \frac{1}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{x^2}{e^{2x}} \right) - 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

e quindi

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Esercizio E. Per la variabile aleatoria X si ha:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \int_0^1 2x^2 dx = \left[\frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3},$$

e

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \int_0^1 2x^3 dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left[\frac{1}{2} x^4 \right]_0^1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

Mentre, per la variabile aleatoria Y , integrando per parti, si ricava:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} y e^{-y} dy \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[y \cdot (-e^{-y}) \right]_0^{\alpha} - \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} 1 \cdot (-e^{-y}) dy = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[-y e^{-y} - e^{-y} \right]_0^{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[-e^{-y} \cdot (y+1) \right]_0^{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\alpha+1}{e^{\alpha}} \right) = 1, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y) dy = \int_0^{\infty} y^2 e^{-y} dy \\ &= \left[y^2 \cdot (-e^{-y}) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2y \cdot (-e^{-y}) dy = \left[-y^2 e^{-y} \right]_0^{\infty} + 2 \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(-\frac{y^2}{e^y} \right) - 0 + 2 = 2. \end{aligned}$$

La varianza sarà quindi data da:

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 2 - (1)^2 = 1.$$

Esercizio F. a) Essendo le entrate complessive giornaliere in lire date da $G = 1500 \cdot X$, il valore atteso e la varianza sono dati da:

$$E(G) = 1500 \cdot E(X) = 60'000, \quad \text{Var}(G) = 1500^2 \cdot \text{Var}(X) = 225'000'000, \quad \sqrt{\text{Var}(G)} = 15'000.$$

Mentre in euro si ha $G = (1500/1936, 27) \cdot X$, pertanto

$$E(G) = \frac{1500}{1936, 27} \cdot E(X) = 30, 99, \quad \text{Var}(G) = \left(\frac{1500}{1936, 27} \right)^2 \cdot \text{Var}(X) = 60, 01, \quad \sqrt{\text{Var}(G)} = 7, 75.$$

b) Applicando la disuguaglianza di Markov con $g(x) = x$ e con $r = 51$, si ottiene:

$$P(X > 50) = P(X \geq 51) \leq \frac{E(X)}{51} = \frac{40}{51} = 0, 7843.$$

c) Applicando la disuguaglianza di Tchebycheff (con $k = 2$) si ottiene:

$$\begin{aligned} P(21 \leq X \leq 59) &= P(20 < X < 60) = P(|X - 40| < 20) = 1 - P(|X - 40| \geq 20) \\ &= 1 - P(|X - \mu| \geq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} = 3/4. \end{aligned}$$

Esercizio G. Essendo $E(X) = 3$ e $E(X^2) = 13$, si ricava immediatamente $\text{Var}(X) = 4$ e $\sigma = 2$. Perciò, un estremo inferiore per $P(-2 < X < 8)$ si può ottenere utilizzando la disuguaglianza di Tchebycheff:

$$P(-2 < X < 8) = P(-5 < X - 3 < 5) = P(|X - 3| < 2, 5 \cdot 2) \geq 1 - \frac{1}{(2, 5)^2} = 0, 84.$$