

Calcolo delle Probabilità

Soluzioni 13. Variabili aleatorie doppie continue

Esercizio A. a) La funzione di densità marginale della X è pari a

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_0^{\infty} ye^{-(x+y)} dy = e^{-x} \int_0^{\infty} ye^{-y} dy = e^{-x},$$

per $x \geq 0$, mentre è pari a 0 altrimenti. La funzione di densità marginale della Y è pari a

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx = \int_0^{\infty} ye^{-(x+y)} dx = ye^{-y} \int_0^{\infty} e^{-x} dx = ye^{-y},$$

per $y \geq 0$, mentre è pari a 0 altrimenti.

b) Per la variabile aleatoria X si ottiene:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} xe^{-x} dx = 1, \\ E(X^2) &= \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = \left[x^2(-e^{-x}) \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2xe^{-x} dx = 0 + 2 \int_0^{\infty} xe^{-x} dx = 2, \end{aligned}$$

e quindi $\text{Var}(X) = 2 - (1)^2 = 2 - 1 = 1$. Per la variabile aleatoria Y si ottiene:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^{\infty} y \cdot ye^{-y} dy = \int_0^{\infty} y^2 e^{-y} dy = \left[y^2(-e^{-y}) \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2ye^{-y} dy \\ &= -\left[\frac{y^2}{e^y} \right]_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} ye^{-y} dy = 0 + 2 \cdot 1 = 2, \\ E(Y^2) &= \int_0^{\infty} y^2 \cdot ye^{-y} dy = \int_0^{\infty} y^3 e^{-y} dy \\ &= \left[y^3(-e^{-y}) \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 3y^2 e^{-y} dy = 0 + 3 \int_0^{\infty} y^2 e^{-y} dy = 3 \cdot 2 = 6, \end{aligned}$$

e quindi $\text{Var}(Y) = 6 - (2)^2 = 6 - 4 = 2$.

c) Per il calcolo della covarianza otteniamo prima

$$E(XY) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} xy \cdot ye^{-(x+y)} dx dy = \int_0^{\infty} \left[y^2 e^{-y} \int_0^{\infty} xe^{-x} dx \right] dy = \int_0^{\infty} y^2 e^{-y} dy = 2,$$

e quindi $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = 2 - 1 \cdot 2 = 0$ e $\text{Corr}(X, Y) = 0$.

d) Si vede che

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = e^{-x} \cdot ye^{-y} = ye^{-(x+y)} = f_{X,Y}(x, y),$$

per $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Inoltre, $f_X(x) \cdot f_Y(y) = f_{X,Y}(x, y) = 0$, altrimenti. Quindi X ed Y sono stocasticamente indipendenti.

Esercizio B. a) La funzione di densità marginale della X è pari a

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^1 \left(x + \frac{3}{2}y^2\right) dy = \left[xy + \frac{1}{2}y^3\right]_0^1 = x + \frac{1}{2},$$

per $0 \leq x \leq 1$, mentre è pari a 0 altrimenti. La funzione di densità marginale della Y è pari a

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = \int_0^1 \left(x + \frac{3}{2}y^2\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2x\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}y^2,$$

per $0 \leq y \leq 1$, mentre è pari a 0 altrimenti.

b) La probabilità richiesta è pari a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(X \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{4} < Y < \frac{1}{2}\right) &= \int_0^{1/2} \int_{1/4}^{1/2} \left(x + \frac{3}{2}y^2\right) dx dy \\ &= \int_0^{1/2} \left[\int_{1/4}^{1/2} \left(x + \frac{3}{2}y^2\right) dy\right] dy = \int_0^{1/2} \left[xy + \frac{1}{2}y^3\right]_{1/4}^{1/2} dy \\ &= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{4}x + \frac{7}{128}\right) dx = \left[\frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{128}x\right]_0^{1/2} = \frac{15}{256}. \end{aligned}$$

c) La funzione di densità condizionata di X dato Y è data da

$$f_{X|Y} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2x + 3y^2}{1 + 3y^2},$$

per $0 \leq x \leq 1$, mentre è pari a 0 altrimenti. Il valore atteso condizionato di X dato Y è dato da

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X|Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x) dx = \int_0^1 x \frac{2x + 3y^2}{1 + 3y^2} dx = \frac{1}{1 + 3y^2} \int_0^1 (2x^2 + 3y^2x) dx \\ &= \frac{1}{1 + 3y^2} \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}y^2x^2\right]_0^1 = \frac{1}{1 + 3y^2} \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2}y^2\right). \end{aligned}$$

d) La probabilità condizionata richiesta è data da

$$\mathbf{P}\left(X \leq \frac{1}{2} \middle| Y = \frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} f_{X|Y=\frac{1}{2}}(x) dx = \int_0^{1/2} \frac{8x + 3}{7} dx = \left[\frac{4x^2 + 3x}{7}\right]_0^{1/2} = \frac{5}{14}.$$

e) Per il calcolo della covarianza otteniamo prima

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \int_0^1 x \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{7}{12}, \\ \mathbf{E}(Y) &= \int_0^1 y \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}y^2\right) dy = \left[\frac{1}{2} \frac{y^2}{2} + \frac{3}{2} \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{5}{8}, \\ \mathbf{E}(XY) &= \int_0^1 \int_0^1 xy \cdot \left(x + \frac{3}{2}y^2\right) dx dy = \int_0^1 \left[y \int_0^1 \left(x + \frac{3}{2}y^2\right) dx\right] dy = \int_0^1 y \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}y^2\right) dy = \frac{5}{8}, \end{aligned}$$

e quindi

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y) = \frac{5}{8} - \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{96} = 0,2604.$$