

Calcolo delle Probabilità

Soluzioni 4. Probabilità condizionata, indipendenza, Teorema di Bayes

Esercizio A. Sia $D = B \cup C$. Considerando che $A \cap D = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
 P(A \cup B \cup C) &= P(A \cup D) \\
 &= P(A) + P(D) - P(A \cap D) \\
 &= P(A) + P(B \cup C) - P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \\
 &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) \\
 &\quad - [P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)] \\
 &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) \\
 &\quad - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).
 \end{aligned}$$

Esercizio B. Si indichi con Ω l'insieme dei punti interni al cerchio e con r il raggio del cerchio. Si indichi inoltre con A l'insieme dei punti interni al cerchio concentrico al primo avente raggio pari a $r/2$. Siccome A consta esattamente di quei punti di Ω che sono più vicini al centro che alla circonferenza, allora

$$p = P(A) = \frac{\text{area di } A}{\text{area di } \Omega} = \frac{\pi \cdot (r/2)^2}{\pi \cdot r^2} = 1/4.$$

Esercizio C. a) Si definiscano gli eventi $A = \{\text{si presenta "testa" in tutti i lanci}\}$, $B = \{\text{si presenta "testa" al primo lancio}\}$ e $C = \{\text{si presenta almeno una "testa"}\}$.

(i) La probabilità condizionata di A dato B è data da

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/8}{1/2} = 1/4.$$

(ii) La probabilità condizionata di A dato C è data da

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{1/8}{7/8} = 1/7.$$

b) (i) Siccome $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/2$ e $P(A \cap B) = P(\{C, C, T\}, \{T, C, C\}) = 1/4$, essendo $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, allora A e B sono indipendenti.

(ii) Siccome $P(A) = 1/2$, $P(B) = 3/8$ e $P(A \cap B) = 1/4$, essendo $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, allora A e B non sono indipendenti.

c) Siccome

$$P(A) = (1/2) \cdot (1/3) + (1/2) \cdot (3/4) = 13/24,$$

$$P(B) = (1/2) \cdot (2/3) \cdot (1/3) + (1/2) \cdot (1/3) \cdot (3/4) + (1/2) \cdot (1/4) \cdot (2/3) + (1/2) \cdot (3/4) \cdot (1/4) = 119/288,$$

$$P(A \cap B) = (1/2) \cdot (1/3) \cdot (3/4) + (1/2) \cdot (3/4) \cdot (1/4) = 7/32,$$

essendo $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, allora A e B non sono indipendenti.

Esercizio D. Si denoti con $T = \{\text{il test è positivo}\}$ e con $A = \{\text{il soggetto ha l'AIDS}\}$. Si richiede $P(A|T)$. Per il Teorema di Bayes si ha:

$$\begin{aligned} P(A|T) &= \frac{P(T|A) \cdot P(A)}{P(T|A) \cdot P(A) + P(T|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})} \\ &= \frac{0,99 \cdot (1/10000)}{0,99 \cdot (1/10000) + 0,05 \cdot (9999/10000)} \simeq 0,002. \end{aligned}$$

Esercizio E. Posto $A = \{\text{la pallina proviene dall'urna } U_1\}$, $B = \{\text{la pallina proviene dall'urna } U_2\}$, $C = \{\text{la pallina proviene dall'urna } U_3\}$ e $R = \{\text{la pallina è rossa}\}$, si richiede $P(A|R)$. Per il Teorema di Bayes

$$\begin{aligned} P(A|R) &= \frac{P(A \cap R)}{P(R)} \\ &= \frac{P(A) \cdot P(R|A)}{P(A) \cdot P(R|A) + P(B) \cdot P(R|B) + P(C) \cdot P(R|C)} \\ &= \frac{(1/3) \cdot (3/8)}{(1/3) \cdot (3/8) + (1/3) \cdot (2/3) + (1/3) \cdot (2/5)} = 45/173. \end{aligned}$$