

Calcolo delle Probabilità

Soluzioni 10. Distribuzione normale

Esercizio A. Essendo Z una variabile aleatoria con distribuzione $\mathcal{N}(0, 1)$, le probabilità richieste sono date da:

- (i) $P(Z \leq 1,38) = 0,9162$;
- (ii) $P(Z > 1,73) = 1 - P(Z \leq 1,73) = 1 - 0,9582 = 0,0418$;
- (iii) $P(Z < -1,54) = 1 - P(Z \geq -1,54) = 1 - P(Z \leq 1,54) = 1 - 0,9382 = 0,0618$;
- (iv) $P(-1,50 < Z \leq 1,50) = 2[P(Z \leq 1,50) - 0,5] = 2[0,9332 - 0,5] = 0,8664$;
- (v) $P(-1,67 < Z \leq 0,45) = P(Z \leq 0,45) - P(Z \leq -1,67)$
 $= P(Z \leq 0,45) - [1 - P(Z \leq 1,67)] = 0,6736 - [1 - 0,9525] = 0,6261$.

Esercizio B. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione $\mathcal{N}(8, 7)$. Allora:

- (i) $P(X \leq 6,7) = P\left(\frac{X - 8}{\sqrt{7}} \leq \frac{6,7 - 8}{\sqrt{7}}\right) = P(\mathcal{N}(0, 1) \leq -0,49)$
 $= 1 - P(\mathcal{N}(0, 1) \leq 0,49) = 1 - 0,6879 = 0,3121$;
- (ii) $P(X > 7,5) = P\left(\mathcal{N}(0, 1) > \frac{7,5 - 8}{\sqrt{7}}\right) = P(\mathcal{N}(0, 1) > -0,189) = 0,4247$;
- (iii) $P(5,5 < X < 10,5) = P(-0,9449 < \mathcal{N}(0, 1) < 0,9449)$
 $= 2[P(\mathcal{N}(0, 1) < 0,9449) - 0,5] = 0,6528$;
- (iv) $P(7,5 < X \leq 9,5) = P(-0,189 < \mathcal{N}(0, 1) < 0,567)$
 $= P(\mathcal{N}(0, 1) \leq 0,567) - P(\mathcal{N}(0, 1) \leq -0,189) = 0,7157 - [1 - 0,5753] = 0,291$.

Esercizio C. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione $\mathcal{N}(20, 23)$.

- (i) $P(X \leq c) = P\left(\mathcal{N}(0, 1) \leq \frac{c - 20}{\sqrt{23}}\right) = 0,8485$, per cui, essendo $P(\mathcal{N}(0, 1) \leq 1,03) = 0,8485$, segue che $1,03 = (c - 20)/\sqrt{23}$, e perciò $c = 24,94$;
- (ii) $P(X > c) = P\left(\mathcal{N}(0, 1) > \frac{c - 20}{\sqrt{23}}\right) = 0,0505$, per cui, essendo $P(\mathcal{N}(0, 1) > 1,64) = 0,0505$, segue che $1,64 = (c - 20)/\sqrt{23}$, e perciò $c = 27,87$;
- (iii) $P(\mu - c < X < \mu + c) = P\left(\frac{-c}{\sqrt{23}} < \mathcal{N}(0, 1) < \frac{c}{\sqrt{23}}\right) = 0,90$, per cui, essendo $P(-1,645 < \mathcal{N}(0, 1) < 1,645) = 0,90$, segue che $1,645 = c/\sqrt{23}$, e perciò $c = 7,889$.

Esercizio D. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Allora,

$$P(X \leq 38) = P\left(\mathcal{N}(0, 1) \leq \frac{38 - \mu}{\sigma}\right) = 0,5438,$$

e

$$\mathbf{P}(X > 32) = \mathbf{P}\left(\mathcal{N}(0, 1) > \frac{32 - \mu}{\sigma}\right) = 0,7704.$$

Perciò, considerando che $\mathbf{P}(\mathcal{N}(0, 1) \leq 0,11) = 0,5438$ e che $\mathbf{P}(\mathcal{N}(0, 1) > -0,74) = 0,7704$ possiamo considerare il sistema di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} 0,11 = \frac{38 - \mu}{\sigma} \\ -0,74 = \frac{32 - \mu}{\sigma} \end{cases}$$

da cui si ricava $\mu = 37,22$ e $\sigma = 7,06$.

Esercizio E. Indicando con X lo stipendio mensile (in euro) degli impiegati del settore bancario si ha che $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

a) Considerando che $\mathbf{P}(X < 950) = 0,2$ e che $\mathbf{P}(X > 1500) = 0,15$, si può scrivere

$$\mathbf{P}\left(\mathcal{N}(0, 1) < \frac{950 - \mu}{\sigma}\right) = 0,2 \quad \text{e} \quad \mathbf{P}\left(\mathcal{N}(0, 1) > \frac{1500 - \mu}{\sigma}\right) = 0,15,$$

per cui

$$-0,84\sigma = 950 - \mu \quad \text{e} \quad 1,04\sigma = 1500 - \mu,$$

da cui si ricava $\mu = 1195,74$ e $\sigma = 292,55$;

b) la probabilità che questo impiegato prenda più di € 1750 è data da

$$\mathbf{P}(X > 1750) = \mathbf{P}\left(\mathcal{N}(0, 1) > \frac{1750 - 1195,74}{292,55}\right) = 1 - 0,9706 = 0,0294.$$

Esercizio F. Indicando con X la statura (in centimetri) degli abitanti della regione in questione, $X \sim \mathcal{N}(170, 234)$.

a) La probabilità che un individuo estratto a caso sia alto più di 180 centimetri è pari a:

$$\mathbf{P}(X > 180) = \mathbf{P}\left(\mathcal{N}(0, 1) > \frac{180 - 170}{\sqrt{234}}\right) = 1 - 0,7422 = 0,2578.$$

b) La probabilità che un individuo sia alto più di 175 centimetri è pari a

$$p = \mathbf{P}(X > 175) = \mathbf{P}\left(\mathcal{N}(0, 1) > \frac{175 - 170}{\sqrt{234}}\right) = 1 - 0,6293 = 0,3707.$$

Perciò, indicando con Y il numero di individui, tra i 10 estratti, alti più di 175 centimetri, la probabilità richiesta è data da

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y \geq 2) &= 1 - \mathbf{P}(Y < 2) = 1 - \mathbf{P}(Y = 0) - \mathbf{P}(Y = 1) \\ &= 1 - \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10} - \binom{10}{1} p^1 (1-p)^9 \\ &= 1 - (1 - 0,3707)^{10} - 10 \cdot 0,3707 (1 - 0,3707)^9 = 0,9329. \end{aligned}$$