

Calcolo delle Probabilità

Esercitazione 12. Variabili aleatorie doppie discrete: covarianza, correlazione e valore atteso condizionato

Esercizio A. Si consideri l'Esercizio C dell'Esercitazione 11.

- a) Calcolare $\text{Cov}(X, Y)$ e ρ_{XY} tra le variabili aleatorie X ed Y relativamente alla distribuzione congiunta A.
- b) Calcolare $\text{Cov}(X, Y)$ e ρ_{XY} tra le variabili aleatorie X ed Y relativamente alla distribuzione congiunta B.

Esercizio B. Sia X una variabile aleatoria con la seguente distribuzione di probabilità

| | | | | |
|--------|-----|-----|-----|-----|
| x | -2 | -1 | 1 | 2 |
| $f(x)$ | 1/4 | 1/4 | 1/4 | 1/4 |

e sia $Y = X^2$.

- a) Determinare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria Y .
- b) Determinare la distribuzione di probabilità congiunta.
- c) Calcolare $\text{Cov}(X, Y)$ e ρ_{XY} . (N.B. Si osservi che $\text{Cov}(X, Y)$ e ρ_{XY} sono pari a 0, pur avendo che X ed Y non sono indipendenti (anzi, Y è una funzione di X)).

Esercizio C. Verificare le seguenti proprietà:

- a) $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$;
- b) $\rho(X, X) = 1$;
- c) $\rho(X, -X) = -1$;
- d1) $\rho(X, Y) = 1$ se $Y = a + bX$, $b > 0$;
- d2) $\rho(X, Y) = -1$ se $Y = a + bX$, $b < 0$;
- e) $\rho(aX + b, cY + d) = \pm \rho(X, Y)$, $a, c \neq 0$.

Esercizio D. Si consideri una scommessa relativa al lancio di un dado in cui:

- se esce un numero inferiore a 3 il capitale scommesso si dimezza;
- se esce un numero maggiore od uguale a 3 il capitale scommesso raddoppia.

Si supponga inoltre di avere a disposizione due dadi con le seguenti distribuzioni di probabilità

| Dado A | | | | | | Dado B | | | | | |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|--------|------|------|------|------|------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/12 | 1/12 | 1/12 | 2/12 | 3/12 | 4/12 |

e si scelga di considerare uno o l'altro dei due dadi lanciando una moneta bilanciata: si lancia il dado A se esce testa, mentre si lancia il dado B se esce croce.

a) Ipotizzando che un giocatore partecipi alla scommessa con un capitale iniziale di 1 euro, disegnare il diagramma ad albero relativo alla scommessa.

b) Indicando con Y il capitale finale e con X il risultato del lancio della moneta ($X = 0$ se esce 'croce'; $X = 1$ se esce 'testa') calcolare $E(Y|X = 0)$ e $E(Y|X = 1)$.

c) Calcolare $E(Y)$ e verificare che $E(Y) = E(Y|X = 0) \cdot P(X = 0) + E(Y|X = 1) \cdot P(X = 1)$.

Esercizio E. Relativamente all'Esercizio B dell'Esercitazione 11:

a) calcolare $E(Y|X = 0)$, $E(Y|X = 1)$ e $\text{Var}(Y|X = 0)$, $\text{Var}(Y|X = 1)$;

b) calcolare $E(Y)$ e $\text{Var}(Y)$;

c) verificare che $E_X[E(Y|X)] = E(Y)$.