

## Calcolo delle Probabilità

### Soluzioni 5. Variabili aleatorie discrete: distribuzione di probabilità e funzione di ripartizione

**Esercizio A. a)** Lo spazio campionario è dato da

$$\Omega = \{(T, T, T), (T, T, C), (T, C, T), (T, C, C), (C, T, T), (C, T, C), (C, C, T), (C, C, C)\}.$$

Le probabilità richieste sono date da  $P(T, T, T) = (2/3)^3 = 8/27$ ,  $P(T, T, C) = P(T, C, T) = P(C, T, T) = (2/3)^2 \cdot (1/3) = 4/27$ ,  $P(T, C, C) = P(C, T, C) = P(C, C, T) = (2/3) \cdot (1/3)^2 = 2/27$ ,  $P(C, C, C) = (1/3)^3 = 1/27$ .

**b)** La distribuzione di probabilità è data da

$x$	0	1	2	3
$P(X = x)$	1/27	10/27	8/27	8/27

**c)** La funzione di ripartizione è data da

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ 1/27, & x \in [0, 1), \\ 11/27, & x \in [1, 2), \\ 19/27, & x \in [2, 3), \\ 1, & x \in [3, +\infty), \end{cases}$$

**Esercizio B.** Lo spazio campionario è dato da  $\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, \dots, 6\}$ ; ad ogni evento elementare si attribuisce una probabilità pari a  $1/36$ . La distribuzione di probabilità della variabile aleatoria  $X$  è data da

$x$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

mentre la funzione di ripartizione della variabile aleatoria  $X$  è data da

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 1), \\ 11/36, & x \in [1, 2), \\ 20/36, & x \in [2, 3), \\ 27/36, & x \in [3, 4), \\ 32/36, & x \in [4, 5), \\ 35/36, & x \in [5, 6), \\ 1, & x \in [6, +\infty). \end{cases}$$

La distribuzione di probabilità della variabile aleatoria  $Y$  è data da

$y$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(Y = y)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

mentre la funzione di ripartizione della variabile aleatoria  $Y$  è data da

$[a, b)$	$(-\infty, 2)$	$[2, 3)$	$[3, 4)$	$[4, 5)$	$[5, 6)$	$[6, 7)$
$F(y), y \in [a, b)$	0	1/36	3/36	6/36	10/36	15/36

  

$[a, b)$	$[7, 8)$	$[8, 9)$	$[9, 10)$	$[10, 11)$	$[11, 12)$	$[12, +\infty)$
$F(y), y \in [a, b)$	21/36	26/36	30/36	33/36	35/36	1

La distribuzione di probabilità della variabile aleatoria  $W$  è data da

$w$	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(W = w)$	1/36	2/36	2/36	3/36	4/36	4/36	3/36	4/36

  

$w$	11	12	13	14	15	16	18
$P(W = w)$	2/36	3/36	2/36	2/36	1/36	2/36	1/36

mentre la funzione di ripartizione della variabile aleatoria  $W$  è data da

$[a, b)$	$(-\infty, 3)$	$[3, 4)$	$[4, 5)$	$[5, 6)$	$[6, 7)$	$[7, 8)$	$[8, 9)$	$[9, 10)$	$[10, 11)$
$F(w), w \in [a, b)$	0	1/36	3/36	5/36	8/36	12/36	16/36	19/36	23/36

  

$[a, b)$	$[11, 12)$	$[12, 13)$	$[13, 14)$	$[14, 15)$	$[15, 16)$	$[16, 18)$	$[18, +\infty)$
$F(w), w \in [a, b)$	25/36	28/36	30/36	32/36	33/36	35/36	1

La distribuzione di probabilità della variabile aleatoria  $Z$  è data da

$z$	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14
$P(Z = z)$	1/36	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	2/36	2/36	2/36

  

$z$	16	18	21	24	27	32	36	40	50	55	72
$P(Z = z)$	2/36	1/36	2/36	2/36	2/36	1/36	2/36	2/36	1/36	2/36	1/36

mentre la funzione di ripartizione della variabile aleatoria  $Z$  è data da

$[a, b)$	$(-\infty, 2)$	$[2, 3)$	$[3, 4)$	$[4, 5)$	$[5, 6)$	$[6, 7)$	$[8, 10)$	$[10, 12)$	$[12, 14)$
$F(z), z \in [a, b)$	0	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	12/36	14/36	16/36

  

$[a, b)$	$[14, 16)$	$[16, 18)$	$[18, 21)$	$[21, 24)$	$[24, 27)$	$[27, 32)$	$[32, 36)$	$[36, 40)$
$F(z), z \in [a, b)$	18/36	20/36	21/36	23/36	25/36	27/36	28/36	30/36

  

$[a, b)$	$[40, 50)$	$[50, 55)$	$[55, 72)$	$[72, +\infty)$
$F(z), z \in [a, b)$	32/36	33/36	35/36	1

**Esercizio C.** Indicando con  $X$  il numero dei componenti guasti, allora  $X \sim \text{Bin}(20; 0,1)$ . La probabilità che il sistema funzioni nel mese considerato è dunque pari a

$$\begin{aligned} P(X \in \{0, 1, 2, 3\}) &= \binom{20}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^{19} \\ &\quad + \binom{20}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^{18} + \binom{20}{3} \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^{17} = 0,867. \end{aligned}$$

**Esercizio D. a)** Indicando con  $X$  il numero delle risposte corrette, allora  $X \sim \text{Bin}(6; 1/4)$ . La probabilità che lo studente superi l'esame rispondendo a caso è dunque pari a

$$P(X \in \{4, 5, 6\}) = \binom{6}{4} \cdot (1/4)^4 \cdot (3/4)^2 + \binom{6}{5} \cdot (1/4)^5 \cdot (3/4)^1 + \binom{6}{6} \cdot (1/4)^6 \cdot (3/4)^0 = 0,0376.$$

**b)** Bisogna scegliere  $k$  in modo tale che si abbia  $\mathbf{P}(X \geq k) \simeq 0,5$ ; utilizzando la funzione di ripartizione, si ottiene:

$$0,5 \simeq \mathbf{P}(X \geq k) = 1 - \mathbf{P}(X < k) = 1 - \mathbf{P}(X \leq k-1) = 1 - F(k-1),$$

e quindi bisogna scegliere  $k$  in modo tale che si abbia  $F(k-1) \simeq 0,5$ . Risulta:

$$F(1) = \binom{6}{0} \cdot (1/4)^0 \cdot (3/4)^6 + \binom{6}{1} \cdot (1/4)^1 \cdot (3/4)^5 = 0,5339,$$

pertanto  $k-1 = 1$  e quindi  $k = 2$ .

**Esercizio E.** Indicando con  $X$  il numero di figli maschi, allora  $X \sim \text{Bin}(10; 0,5)$ . Quindi:

**a)**

$$\mathbf{P}(X = 5) = \binom{10}{5} \cdot (0,5)^5 \cdot (0,5)^5 = 252 \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{252}{1024} = 0,2461;$$

**b)**

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(3 \leq X \leq 8) &= 1 - [\mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 1) + \mathbf{P}(X = 2) + \mathbf{P}(X = 9) + \mathbf{P}(X = 10)] \\ &= 1 - [2 \cdot (0,5^{10}) + 10 \cdot 0,5^{10} + 45 \cdot 0,5^{10}] \\ &= 1 - (67/2^{10}) = 0,9346. \end{aligned}$$

**Esercizio F.** Indicando con  $X$  il numero di pezzi difettosi, allora  $X \sim \text{Bin}(100; 0,02)$ . Quindi:

**a)**  $\mathbf{P}(X = 0) = 0,98^{100} = 0,1326$ ;

**b)**  $\mathbf{P}(X < 3) = F(2) = 0,98^{100} + 100 \cdot 0,02 \cdot 0,98^{99} + 4950 \cdot 0,02^2 \cdot 0,98^{98} = 0,6767$ .