ISTITUZIONI DI STATISTICA – A. A. 2007/2008
Marco Minozzo e Annamaria Guolo
Laurea in Economia del Commercio Internazionale
Laurea in Economia e Amministrazione delle Imprese
Università degli Studi di Verona (sede di Vicenza)

Calcolo delle Probabilità

Soluzioni 12. Variabili aleatorie doppie discrete: covarianza, correlazione e valore atteso condizionato

Sia (X, Y) una v.a. doppia discreta con distribuzione di probabilità f_{ij} associata alla coppia (x_i, y_j), $\forall i, \forall j$. Siano inoltre $f_{i.}$ e $f_{.j}$ le distribuzioni di probabilità marginali per X e Y, rispettivamente. Allora, i *valori attesi marginali* di X e Y sono dati da

$$E(X) = \sum_i x_i f_{i.}\ ,\ E(Y) = \sum_j y_j f_{.j}.$$

La *covarianza* tra X e Y è data da

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y),$$

dove

$$E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j f_{ij}.$$

Note le varianze di X e Y, la *correlazione* tra X e Y è data da

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}.$$

Inoltre, è possibile determinare il *valore atteso di Y condizionato* al valore x_i assunto X (e viceversa) come

$$E(Y|X = x_i) = \sum_j y_j f_{j|i},\ \forall i.$$

Analogamente, per la varianza si ha che

$$Var(Y|X = x_i) = \sum_j (y_j - E(Y|X = x_i))^2 f_{j|i},\ \forall i.$$

Esercizio A. a) Per la covarianza ed il coefficiente di correlazione tra X e Y, rispetto alla distribuzione congiunta A, si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X \cdot Y) &= \sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{3} x \cdot y \cdot f(x,y) \\ &= 1 \cdot 1 \cdot (1/6) + 0 + 0 + 0 + 2 \cdot 2 \cdot (2/6) + 0 + 0 + 0 + 3 \cdot 3 \cdot (3/6) \\ &= (1/6) + (8/6) + (27/6) = 36/6 = 6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= \mathrm{E}(X) = (1/6) + (4/6) + (9/6) = 14/6 = 7/3, \\ \mathrm{E}(Y^2) &= \mathrm{E}(X^2) = (1/6) + (8/6) + (27/6) = 6, \\ \mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = 6 - (49/9) = 5/9, \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}(X \cdot Y) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = 6 - (49/9) = 5/9, \\ \rho(X,Y) &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X) \cdot \mathrm{Var}(Y)}} = 1. \end{aligned}$$

b) Per la covarianza ed il coefficiente di correlazione tra X e Y, rispetto alla distribuzione congiunta B, essendo le due variabili aleatorie indipendenti, si ottiene:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \quad \text{e} \quad \rho(X,Y) = 0.$$

Esercizio B. a) La distribuzione di probabilità della variabile aleatoria Y è data da:

y	1	4
$\mathsf{P}(Y = y)$	1/2	1/2

b) La distribuzione di probabilità congiunta è data da:

	y	
x	1	4
-2	0	1/4
-1	1/4	0
1	1/4	0
2	0	1/4

c) Per la covarianza e il coefficiente di correlazione tra X e Y si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X \cdot Y) &= -8 \cdot (1/4) - 1 \cdot (1/4) + 1 \cdot (1/4) + 8 \cdot (1/4) = 0, \\ \mathrm{E}(X) &= -2 \cdot (1/4) - 1 \cdot (1/4) + 1 \cdot (1/4) + 2 \cdot (1/4) = 0, \end{aligned}$$

e dunque

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y) = 0 - 0 \cdot \mathrm{E}(Y) = 0,$$

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{0}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = 0.$$

Esercizio C.

a) $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \dfrac{\mathrm{Cov}(Y,X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)\mathrm{Var}(X)}} = \rho(Y,X).$

b) $\rho(X,X) = \dfrac{\text{Cov}(X,X)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(X)}} = \dfrac{\text{E}[(X-\mu_X)(X-\mu_X)]}{\sqrt{[\text{Var}(X)]^2}} = \dfrac{\text{Var}(X)}{\text{Var}(X)} = 1.$

c) $\rho(X,-X) = \dfrac{\text{Cov}(X,-X)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(-X)}} = \dfrac{\text{E}[(X-\mu_X)(-X-(-\mu_X))]}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(X)}} = \dfrac{-\text{Cov}(X,X)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(X)}} = -1.$

d1) Nel caso $Y = a + bX$, con $b > 0$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\rho(X, a+bX) &= \frac{\text{Cov}(X, a+bX)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(a+bX)}} = \frac{\text{E}(X\cdot(a+bX)) - \text{E}(X)\text{E}(a+bX)}{\sqrt{\text{Var}(X)\cdot b^2\text{Var}(X)}} \\
&= \frac{\text{E}(aX+bX^2) - \text{E}(X)(a+b\text{E}(X))}{b\text{Var}(X)} = \frac{a\text{E}(X)+b\text{E}(X^2) - a\text{E}(X) - b[\text{E}(X)]^2}{b\text{Var}(X)} \\
&= \frac{b(\text{E}(X^2) - [\text{E}(X)]^2)}{b\text{Var}(X)} = \frac{b\text{Var}(X)}{b\text{Var}(X)} = 1.
\end{aligned}$$

d2) Procedendo analogamente al punto d1), e ricordando che se $b < 0$ allora $b/|b| = -1$, si ottiene:

$$\rho(X, a+bX) = \frac{\text{Cov}(X, a+bX)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(a+bX)}} = \frac{b\text{Var}(X)}{\sqrt{\text{Var}(X)\cdot b^2\text{Var}(X)}} = \frac{b\text{Var}(X)}{|b|\text{Var}(X)} = -1.$$

e) Per il coefficiente di correlazione tra $aX + b$ e $cY + d$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
\rho(aX+b, cY+d) &= \frac{\text{Cov}(aX+b, cY+d)}{\sqrt{\text{Var}(aX+b)\text{Var}(cY+d)}} = \frac{\text{E}[(aX+b)(cY+d)] - \text{E}(aX+b)\text{E}(cY+d)}{\sqrt{a^2\text{Var}(X)\cdot c^2\text{Var}(Y)}} \\
&= \frac{ac\text{E}(XY) + ad\text{E}(X) + bc\text{E}(Y) + bd - ac\text{E}(X)\text{E}(Y) - ad\text{E}(X) - bc\text{E}(Y) - bd}{|ac|\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \\
&= \frac{ac(\text{E}(XY) - \text{E}(X)\text{E}(Y))}{|ac|\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{ac}{|ac|}\cdot\rho(X,Y),
\end{aligned}$$

e dunque

$$\rho(aX+b, cY+d) = \begin{cases} \rho(X,Y), & \text{se } a \text{ e } c \text{ hanno lo stesso segno,} \\ -\rho(X,Y), & \text{se } a \text{ e } c \text{ hanno segno opposto.} \end{cases}$$

Esercizio D. b) La distribuzione di probabilità condizionata di Y dato $X = 1$ è data da:

y	1/2	2
$\mathsf{P}(Y = y \mid X = 1)$	1/3	2/3

e dunque si ottiene:

$$\begin{aligned}
\text{E}(Y|X=1) &= (1/2)\cdot(1/3) + 2\cdot(2/3) = 1/6 + 4/3 = 3/2, \\
\text{Var}(Y|X=1) &= (1/4)\cdot(1/3) + 4\cdot(2/3) - 9/4 = 6/12 = 1/2.
\end{aligned}$$

La distribuzione di probabilità condizionata di Y dato $X = 0$ è data da:

y	1/2	2
$\mathsf{P}(Y = y \mid X = 0)$	1/6	5/6

e dunque si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y|X=0) &= (1/2)\cdot(1/6)+2\cdot(5/6)=1/12+10/6=7/4,\\ \mathrm{Var}(Y|X=0) &= (1/4)\cdot(1/6)+4\cdot(5/6)-49/16=5/16.\end{aligned}$$

c) La distribuzione di probabilità marginale di Y è data da:

y	1/2	2
$\mathsf{P}(Y=y)$	1/4	3/4

e dunque si ottiene:

$$\mathrm{E}(Y)=(1/2)\cdot(1/4)+2\cdot(3/4)=1/8+6/4=13/8,$$

e si può quindi verificare che

$$\mathrm{E}(Y|X=0)\cdot\mathsf{P}(X=0)+\mathrm{E}(Y|X=1)\cdot\mathsf{P}(X=1)=(7/4)\cdot(1/2)+(3/2)\cdot(1/2)=13/8=\mathrm{E}(Y).$$

Esercizio E. a) La distribuzione di probabilità condizionata di Y dato $X=0$ è data da:

y	0	1	2	3
$\mathsf{P}(Y=y\|X=0)$	0	1/4	1/2	1/4

e dunque si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y|X=0) &= 1\cdot(1/4)+2\cdot(1/2)+3\cdot(1/4)=2,\\ \mathrm{Var}(Y|X=0) &= 1\cdot(1/4)+4\cdot(1/2)+9\cdot(1/4)-4=1/2.\end{aligned}$$

La distribuzione di probabilità condizionata di Y dato $X=1$ è data da:

y	0	1	2	3
$\mathsf{P}(Y=y\|X=1)$	1/4	1/2	1/4	0

e dunque si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y|X=1) &= 0\cdot(1/4)+1\cdot(1/2)+2\cdot(1/4)=1,\\ \mathrm{Var}(Y|X=1) &= 0\cdot(1/4)+1\cdot(1/2)+4\cdot(1/4)-1=1/2.\end{aligned}$$

b) La distribuzione di probabilità marginale di Y è data da:

y	0	1	2	3
$\mathsf{P}(Y=y)$	1/8	3/8	3/8	1/8

e dunque si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y) &= 1\cdot(3/8)+2\cdot(3/8)+3\cdot(1/8)=3/2,\\ \mathrm{Var}(Y) &= 1\cdot(3/8)+4\cdot(3/8)+9\cdot(1/8)-9/4=21/4.\end{aligned}$$

c) Si può verificare che:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_X[\mathrm{E}(Y|X)] &= \mathrm{E}(Y|X=0)\cdot\mathsf{P}(X=0)+\mathrm{E}(Y|X=1)\cdot\mathsf{P}(X=1)\\ &= 2\cdot(1/2)+1\cdot(1/2)=1+1/2=3/2=\mathrm{E}(Y).\end{aligned}$$