Marco Minozzo e Annamaria Guolo
Laurea in Economia del Commercio Internazionale
Laurea in Economia e Amministrazione delle Imprese
Università degli Studi di Verona (sede di Vicenza)

Calcolo delle Probabilità
Soluzioni 7. Valore atteso e varianza

Esercizio A. Per la variabile aleatoria X, valore atteso, momento secondo e varianza sono dati da:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= 1 \cdot \frac{11}{36} + 2 \cdot \frac{9}{36} + 3 \cdot \frac{7}{36} + 4 \cdot \frac{5}{36} + 5 \cdot \frac{3}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36} = 2,53,\\
\mathrm{E}(X^2) &= 1^2 \cdot \frac{11}{36} + 2^2 \cdot \frac{9}{36} + 3^2 \cdot \frac{7}{36} + 4^2 \cdot \frac{5}{36} + 5^2 \cdot \frac{3}{36} + 6^2 \cdot \frac{1}{36} = 8,36,\\
\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = 8,36 - (2,53)^2 = 1,96,
\end{aligned}$$

per cui, la deviazione standard è pari a $\sigma_X = \sqrt{1,96} = 1,4$.
Per la variabile aleatoria Y, valore atteso, varianza e deviazione standard sono dati da:

$$\mathrm{E}(Y) = 6,61, \qquad \mathrm{Var}(Y) = 11,13, \qquad \sigma_Y = 3,34.$$

Per la variabile aleatoria W, valore atteso, varianza e deviazione standard sono dati da:

$$\mathrm{E}(W) = 8,75, \qquad \mathrm{Var}(W) = 16,97, \qquad \sigma_W = 4,12.$$

Esercizio B. Indicando con X il numero di punte difettose presenti in ciascuna scatola e sapendo che $X \sim \mathrm{Bin}(n; p)$, dove $n = 100$ e $p = 0,02$, il numero atteso di punte difettose è dato da

$$\mathrm{E}(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0,02 = 2.$$

Esercizio C. Valore atteso e varianza della variabile standardizzata Y sono dati da

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &= \mathrm{E}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\,\mathrm{E}(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}\,(\mu-\mu) = 0,\\
\mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{Var}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\,\mathrm{Var}(X-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}\,\mathrm{Var}(X) = \sigma^2\,\frac{1}{\sigma^2} = 1.
\end{aligned}$$

Esercizio D. Indicando con C_1 il capitale del giocatore dopo il primo lancio, questo è una variabile aleatoria con distribuzione di probabilità

x	$C/2$	$2C$
$\mathsf{P}(C_1 = x)$	2/3	1/3

Analogamente, indicando con C_2 il capitale del giocatore dopo il secondo lancio, questo è una variabile aleatoria con distribuzione di probabilità

x	$C/4$	C	$4C$
$\mathsf{P}(C_2 = x)$	4/9	4/9	1/9

Infine, indicando con C_3 il capitale del giocatore dopo il terzo lancio, questo è una variabile aleatoria con distribuzione di probabilità

x	$C/8$	$C/2$	$2C$	$8C$
$\mathsf{P}(C_3 = x)$	8/27	12/27	6/27	1/27

Il capitale atteso del giocatore dopo ciascuno dei tre lanci è dato dal valore atteso delle variabili aleatorie C_1, C_2 e C_3:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}(C_1) &= (C/2) \cdot (2/3) + 2C \cdot (1/3) = C, \\
\mathsf{E}(C_2) &= (C/4) \cdot (4/9) + C \cdot (4/9) + 4C \cdot (1/9) = C, \\
\mathsf{E}(C_3) &= (C/8) \cdot (8/27) + (C/2) \cdot (12/27) + 2C \cdot (6/27) + 8C \cdot (1/27) = C.
\end{aligned}
$$

Sulla base del valore atteso della scommessa, partecipare o meno al gioco è indifferente perchè il valore atteso del capitale alla fine del gioco è pari al valore iniziale del capitale.