

Statistica Inferenziale

Soluzioni 3. Intervalli di confidenza

Esercizio A.

a) Il carattere in considerazione nella popolazione di riferimento non è distribuito normalmente, per cui l'intervallo di confidenza richiesto non si costruisce usando i quantili della distribuzione t di Student. Si può invece, sfruttando l'estensione del teorema del limite centrale, ricorrere al fatto che per grandi campioni la grandezza $(\bar{X} - \mu_x)/\sqrt{S^2/n}$ si distribuisce approssimativamente come una normale standardizzata. Di conseguenza, se il campione è grande, si può determinare l'intervallo di confidenza utilizzando i quantili di una normale standardizzata. Essendo $\alpha = 0,01$, si cerca il quantile $z_{0,005}$, ovvero quel valore tale che $P(Z \geq z_{0,005}) = 0,005$; esso è pari a 2,576. Quindi, l'intervallo cercato è dato da $[53,00 - 2,576 \cdot 20/\sqrt{50}; 53,00 + 2,576 \cdot 20/\sqrt{50}]$, ovvero da [45,714; 60,286].

Esercizio B.

a) Sia \bar{R} la v. a. che esprime la media del campione. Essendo l'alternativa $H_1 : \mu_R < 0,5$ composta da valori della media più piccoli che sotto H_0 , si rifiuterà l'ipotesi nulla H_0 per piccoli valori di \bar{R} . Essendo $\alpha = 0,05$, si rifiuterà H_0 per valori di \bar{R} inferiori a R_α , dove R_α è tale che $P(\bar{R} \leq R_\alpha; H_0) = 0,05$. Per trovare il valore R_α si consideri che le R_i sono distribuite normalmente e che se è vera H_0 queste hanno media pari a 0,5. Quindi, potendo scrivere $P(\bar{R} \leq R_\alpha; H_0) = 0,05 = P\left(\frac{\bar{R}-0,5}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq \frac{R_\alpha-0,5}{\frac{S}{\sqrt{n}}}; H_0\right)$, ed essendo $(\bar{R} - 0,5)/\sqrt{S^2/n}$ distribuita come una t di Student con g.d.l. pari a 29, il valore $(R_\alpha - 0,5)/\sqrt{S^2/n}$ deve essere pari a -1,699, ovvero $R_\alpha = -1,699 \frac{S}{\sqrt{n}} + 0,5 = -1,113$. La zona di rifiuto di H_0 è pertanto costituita dai valori osservati di \bar{R} inferiori a -1,113, ed essendo il valore osservato $\bar{R} = 0,3$ superiore a -1,113 si accetta H_0 . Un procedimento alternativo consiste nel confrontare $(0,3 - 0,5)\sqrt{n}/(5,2)$ con -1,699 e rifiutare H_0 se tale valore è inferiore a -1,699, dal momento che se la disuguaglianza di sopra risulta verificata anche questa disuguaglianza risulta verificata, e viceversa.

b) Per trovare l'intervallo di confidenza richiesto si consideri che $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{29}^2$, per cui l'intervallo di confidenza al 95% è dato da $\left[\frac{29 \times (5,2)^2}{45,722}; \frac{29 \times (5,2)^2}{16,047}\right] = [17,150; 48,866]$.

c) Il "Value at Risk" T soddisfa alla relazione $P(R_i \leq T) = 0,01 = P(Z \leq \frac{T-0,5}{6,99})$, dove Z è una v. a. con distribuzione normale standardizzata. Essendo che il percentile della normale standardizzata che lascia alla sua sinistra un'area pari a 0,01 è pari a -2,326, si ricava che $T = -2,326 \cdot 6,99 + 0,5 = 15,759$, ovvero che la riserva patrimoniale a fronte di tale investimento deve essere pari a circa 15 milioni e 760 mila euro. Questa riserva fronteggia perdite che sono estremamente rare.

Esercizio C.

a) Per l'estensione del teorema del limite centrale, abbiamo che $\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \approx N(0,1)$, per n grande.

Quindi, l'intervallo di confidenza ha estremi $\hat{p} - 1,96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ e $\hat{p} + 1,96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, dove $n = 351$, ovvero, l'intervallo è dato da [0,598; 0,698].