

## Statistica Inferenziale

### Soluzioni 2. Stima puntuale

#### Esercizio A.

a) Sia  $\mu_R$  il valore atteso di  $R_i$ , allora  $\mu_R = 5 + 0,5\mu_X$ . Ora,  $\bar{R}$  è corretto se  $E(\bar{R}) = \mu_R$ . Per le proprietà di linearità del valore atteso, si ha  $E(\bar{R}) = E(5 + 0,5\bar{X}) = 5 + 0,5 \cdot E(\bar{X}) = 5 + 0,5\mu_X = \mu_R$ , per cui possiamo affermare che  $\bar{R}$  è corretto per  $\mu_R$ .

b) La varianza dello stimatore  $\bar{R}$  è data da  $\text{Var}(\bar{R}) = 0,5^2 \cdot \text{Var}(\bar{X}) = (0,5 \cdot \sigma_X)^2 / 50 = 1$ .

c) Lo stimatore  $\bar{R}$  è consistente per  $E(R_i)$  se  $\lim_{n \rightarrow \infty} P[|\bar{R} - \mu_R| \leq \epsilon] = 1$ , per ogni  $\epsilon > 0$ , dove  $n$  è la numerosità campionaria. Dalla disuguaglianza di Tchebycheff si sa che  $P[|\bar{R} - \mu_R| \leq k\sigma_{\bar{R}}] \geq 1 - 1/k^2$ . Ponendo  $\epsilon = k \cdot \sigma_{\bar{R}} = k \cdot 0,5 \sigma_X / \sqrt{n}$ , si ha che  $\lim_{n \rightarrow \infty} P[|\bar{R} - \mu_R| \leq \epsilon] \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{0,25\sigma_X^2}{\epsilon^2 n}\right)$ , ed essendo il limite a destra della disuguaglianza pari a 1 si ha la consistenza.

Si noti che la probabilità non può mai superare 1, da cui l'uguaglianza.

d) Per determinare la numerosità campionaria richiesta, consideriamo che  $P[|\bar{X} - \mu_X| \leq 10] = P\left[|Z| \leq \frac{10\sqrt{n}}{\sigma_X}\right] = 0,95$ , dove  $Z = (\bar{X} - \mu_X) / \sqrt{\sigma_X^2/n}$ . Per il teorema del limite centrale si può approssimare la distribuzione di  $Z$  con una  $N(0,1)$ . Quindi, considerando che il percentile (della normale standardizzata) che lascia alla sua destra una probabilità di 0.975 è pari a 1,96, ponendo  $1,96 = 10 / \sqrt{\sigma_X^2/n}$ , si ricava  $\sqrt{n} = 0,196 \cdot \sqrt{200}$ , ovvero  $n \approx 8$ . Si noti che la numerosità campionaria richiesta  $n$  è direttamente proporzionale alla varianza  $\sigma_X^2$  e inversamente proporzionale all'errore di stima (che è stato posto pari a 10).

#### Esercizio B.

a) Si indichi con  $A$  l'affluenza alle urne, cioè il numero di elettori che andranno a votare. Allora,  $A = Np$  e si vuole verificare se  $N\hat{p}$  è uno stimatore corretto di  $A$ . Ora,  $E(N\hat{p}) = N \cdot E(\hat{p}) = Np = A$ , per cui  $N\hat{p}$  è uno stimatore corretto per  $A$ .

b) Si vuole trovare la numerosità campionaria  $n$  tale che

$$P[|\hat{p} - p| \leq 0,05] = 0,95 = P\left[\frac{|\hat{p} - p|}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq \frac{0,05}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right].$$

Essendo la varianza  $p(1-p)/n$  incognita, questa si può porre pari al suo valore massimo  $0,25/n$ . Quindi, considerando che  $P\left[\frac{|\hat{p} - p|\sqrt{n}}{0,5} \leq \frac{0,05\sqrt{n}}{0,5}\right] = 0,95$ , usando l'approssimazione alla normale, si trova che l'evento  $\frac{|\hat{p} - p|\sqrt{n}}{0,5} \leq \frac{0,05\sqrt{n}}{0,5}$  si verifica con probabilità pari a 0,95 se  $0,05\sqrt{n}/0,5 = 1,96$ . Da questo si ricava che la numerosità campionaria  $n$  cercata è approssimativamente pari a 384.

#### Esercizio C.

a) Il valore atteso dello stimatore  $T$  è dato da  $E(T) = (3E(X_1) + 4E(X_2) + 2E(X_3))/7 + a$ . Essendo  $E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = \mu$ , si ha che  $E(T) = (9/7)\mu + a$ . Imponendo la condizione di correttezza  $E(T) = \mu$ , si ricava che questa è verificata solo se  $a = -(2/7)\mu$ .

b) La distorsione di  $T$  per  $a = 10$  è pari a  $E(T) - \mu = (2/7)\mu + 10$ . Si noti che tale distorsione vale zero se  $\mu = -35$ .