

## Statistica Inferenziale

### Soluzioni 4. Verifica di ipotesi

#### Esercizio A.

a) Dai 10 valori campionari osservati si ottiene una media campionaria pari a  $\bar{x} = 14,2$  e una varianza campionaria corretta pari a  $S^2 = 112,63$ . Si rifiuta  $H_0$  per valori di  $\bar{X}$  maggiori di  $\bar{x}_\alpha$  dove  $\bar{x}_\alpha$  è tale che  $P(\bar{X} \geq \bar{x}_\alpha; H_0) = \alpha = P(T \geq \frac{\bar{x}_\alpha - 8}{S/\sqrt{n}})$  dove  $T$  ha distribuzione  $t$  di Student con 9 g.d.l. Dalle tavole si trova che  $\frac{\bar{x}_\alpha - 8}{S/\sqrt{n}} = 2,821$  da cui  $\bar{x}_\alpha = 2,821 \cdot 3,356 + 8 = 17,467$ . Essendo  $\bar{x} = 14,2$  minore del valore soglia, si accetta  $H_0$ .

b) La probabilità richiesta è data da

$$P(\bar{X} > 15,59; \mu = 8) = P\left(T > \frac{15,59 - 8}{\sqrt{112,63/10}}; \mu = 8\right) = P(T > 2,262) = 0,025,$$

dove  $T = (\bar{X} - 8)/\sqrt{112,63/10}$  ha distribuzione  $t$  di Student con 9 g.d.l.

c) Si rifiuta l'ipotesi nulla per valori osservati di  $S^2$  maggiori di  $s_\alpha^2$ , dove  $s_\alpha^2$  è tale che  $P(S^2 \geq s_\alpha^2; H_0) = \alpha = P\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \frac{(n-1)s_\alpha^2}{\sigma_0^2}; H_0\right]$ , dove  $\sigma_0^2$  è il valore di  $\sigma^2$  sotto l'ipotesi nulla e  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$  si distribuisce come una  $\chi^2$  con 9 g.d.l. Dalle tavole si trova che  $\frac{(n-1)s_\alpha^2}{\sigma_0^2} = 16,919$ , da cui  $s_\alpha^2 = 16,919 \cdot 10/9 = 18,8$ , ed essendo  $S^2$  pari a 112,63, si rifiuta  $H_0$ .

#### Esercizio B.

a) Si rifiuta l'ipotesi nulla per valori osservati della differenza  $D = \bar{X} - \bar{Y}$  superiori a  $D_{\alpha/2}$  oppure inferiori a  $-D_{\alpha/2}$ , dove  $D_{\alpha/2}$  è tale che  $P(|D| \geq D_{\alpha/2}; H_0) = \alpha = P\left(|Z| \geq \frac{D_{\alpha/2}}{S_p \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}\right)$ , e dove  $S_p^2 = (S_X^2(n_1 - 1) + S_Y^2(n_2 - 1))/(n_1 + n_2 - 2)$  e  $Z$  ha approssimativamente distribuzione normale standardizzata. Dalle tavole si trova che  $\frac{D_{\alpha/2}}{S_p \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} = 2,576$ , da cui  $D_{\alpha/2} = 2,576 \cdot S_p \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}$ . Ed essendo  $S_p = 1,12$ , si ha che  $D_{\alpha/2} = 0,178$ . Per cui avendo osservato un valore di  $D$  pari a  $-0,2$ , si rifiuta  $H_0$ . Si noti che mancando l'assunzione di normalità dei dati di partenza, ed essendo  $n_1$  e  $n_2$  sufficientemente grandi, abbiamo assunto che  $Z$  fosse approssimativamente distribuita come una normale standardizzata in base all'estensione del teorema del limite centrale.

b) Per questa verifica di ipotesi, si rifiuta l'ipotesi nulla  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  per valori di  $D$  maggiori di  $D_\alpha = z_\alpha \sigma \sqrt{1/n_1 + 1/n_2} = 0,16027$ , dove  $z_\alpha = 2,326$ . Quindi, la potenza del test è data da  $P(D > D_\alpha; H_1) = P\left(Z > \frac{0,16027 - 0,5}{\sqrt{1,25(1/n_1 + 1/n_2)}}\right) = P(Z > -4,93) = 1$ , dove  $Z$  ha approssimativamente distribuzione normale standardizzata.

c) Si rifiuta l'ipotesi nulla per valori osservati della differenza  $D = \hat{p}_{95} - \hat{p}_{96}$  inferiori a  $D_\alpha$ , con  $D_\alpha$  tale che  $P(D \leq D_\alpha; H_0) = \alpha = P\left(Z \leq \frac{D_\alpha}{S_{\hat{p}_{95} - \hat{p}_{96}}}\right)$ , dove  $S_{\hat{p}_{95} - \hat{p}_{96}} = \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$ ,  $\hat{p} = (\hat{p}_{95}n_1 + \hat{p}_{96}n_2)/(n_1 + n_2)$ ,  $n_1 = 80$ ,  $n_2 = 90$  e  $Z$  ha approssimativamente distribuzione normale standardizzata. Dalle tavole si trova che il percentile che lascia alla sua destra una probabilità del 95% è pari a  $-1,645$ , per cui  $\frac{D_\alpha}{S_{\hat{p}_{95} - \hat{p}_{96}}} = -1,645$ , ed essendo  $\hat{p}_{95} = 0,624$ ,  $\hat{p}_{96} = 0,645$ ,  $\hat{p} = 0,635$ ,

$S_{\hat{p}_{95}-\hat{p}_{96}} = 0,0740$ ,  $D_\alpha = -1,645 \cdot 0,0740 = -0,12$ . Perciò avendo osservato un valore di  $D$  pari a  $-0,021$ , si accetta  $H_0$ .