La Minimizzazione dei costi

Il nostro obiettivo è lo studio del comportamento di un'impresa che massimizza il profitto sia in mercati concorrenziali che non concorrenziali. Ora vedremo la fase della minimizzazione dei costi, approccio meno diretto ma che comunque offre notevoli possibilità di approfondimento.

1. Minimizzazione dei costi

Supponiamo di disporre di due fattori di produzione con prezzi w_1 e w_2: si vuole individuare il modo più economico per produrre un dato livello di output, y. Il problema di minimizzazione dei costi è pertanto:

$$\begin{aligned} &\min_{x_1,x_2} w_1x_1 + w_2x_2 \\ &\textit{tale che } f(x_1,x_2) = y. \end{aligned}$$

Notare che si deve fare riferimento a *tutti* i costi di produzione e nello stesso arco temporale.

La soluzione del problema di minimizzazione dei costi dipenderà da w_1 e w_2 e y, viene espressa con $c(w_1, w_2, y)$: è la funzione di costo ed esprime i costi minimi necessari per produrre y unità di output quando i prezzi dei fattori sono (w_1, w_2).

Per risolvere questo problema graficamente rappresentiamo i costi ed i vincoli della tecnologia, questi ultimi che illustrano tutte le combinazioni di x_1 e x_2 che possono produrre y.

Vediamo quali sono tutte le combinazioni di fattori il cui costo di produzione sia C, cioè

$$C = w_1 x_1 + w_2 x_2.$$

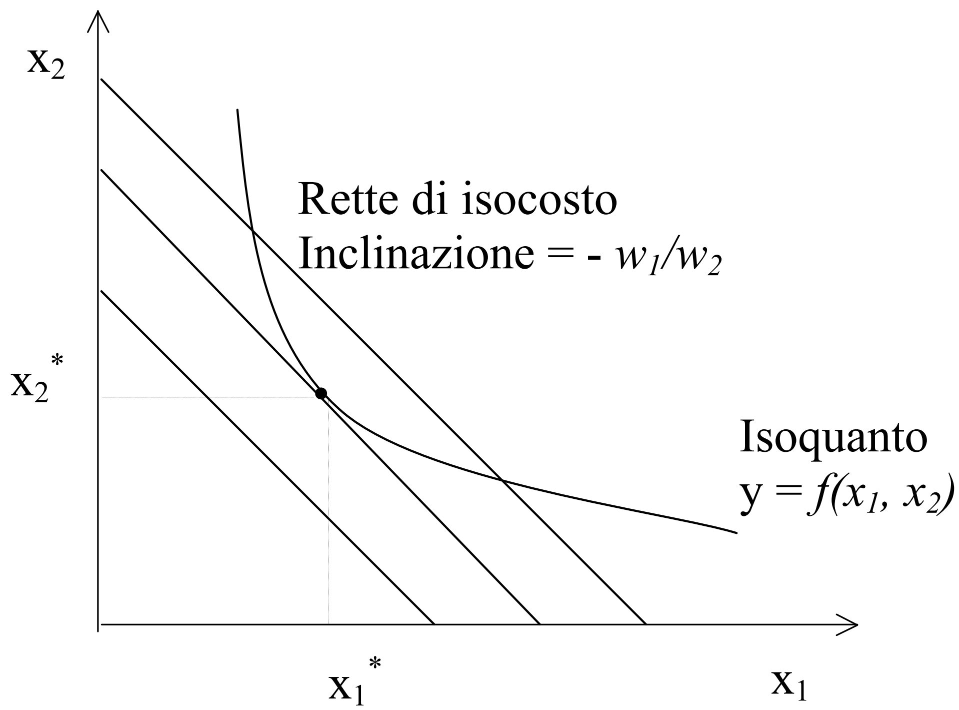
Risolviamo per x_2 ed otteniamo:

$$x_2 = \frac{C}{w_2} - \frac{w_1}{w_2} x_1.$$

Questa funzione rappresenta una retta con inclinazione $-w_1/w_2$ e intercetta verticale C/w_2. Al variare di C si otterrà un insieme di **rette di isocosto**: sulla retta corrispondono punti con lo stesso costo, mentre a rette di isocosto più elevate corrispondono costi più elevati. Quindi il problema della minimizzazione dei costi si traduce nel trovare sull'isoquanto il punto al quale è associata la retta di isocosto più bassa possibile. Figura 1.

Anche qui condizione di tangenza: l'inclinazione dell'isoquanto deve essere uguale all'inclinazione della curva di isocosto. Quindi, <u>il saggio tecnico di sostituzione deve essere uguale al rapporto tra i prezzi dei fattori</u>:

$$-\frac{MP_1(x_1^*, x_2^*)}{MP_2(x_1^*, x_2^*)} = TRS(x_1^*, x_2^*) = -\frac{w_1}{w_2}.$$



Per ottenere l'equazione precedente, si consideri una variazione nella quantità impiegata dei fattori produttivi (Δx_1, Δx_2), che mantenga costante il livello di output, ovvero che:

$$MP_1(x_1^*, x_2^*)\Delta x_1 + MP_2(x_1^*, x_2^*)\Delta x_2 = 0. \qquad (1.1)$$

Notare che i segni di (Δx_1, Δx_2) devono essere opposti, in quanto se aumenta il fattore 1 deve diminuire il fattore 2.
Se il costo è già minimo, la variazione non lo potrà ridurre ulteriormente e quindi:

$$w_1\Delta x_1 + w_2\Delta x_2 \geq 0.$$

Consideriamo ora la variazione ($-\Delta x_1, -\Delta x_2$), che anch'essa consente di produrre lo stesso livello di produzione senza minimizzare i costi, ovvero che:

$$-w_1\Delta x_1 - w_2\Delta x_2 \geq 0.$$

Combinando le due equazioni precedenti si ottiene:

$$w_1\Delta x_1 + w_2\Delta x_2 = 0. \tag{1.2}$$

Risolvendo le due equazioni (1.1) e (1.2) per $\Delta x_1/\Delta x_2$ si otterrà:

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{w_1}{w_2} = -\frac{MP_1(x_1^*, x_2^*)}{MP_2(x_1^*, x_2^*)},$$

che è la condizione di minimizzazione dei costi ottenuta geometricamente.

La figura 1 è simile al problema della scelta del consumatore, anche se ci sono delle differenze. Nella scelta di consumo, la retta rappresenta il vincolo di bilancio ed il consumatore si sposta per trovare la posizione preferita. Nella produzione, invece, l'isoquanto rappresenta il vincolo tecnologico, e il produttore si sposta lungo l'isoquanto per trovare la posizione ottimale.

Le scelte delle quantità di input che minimizzano i costi dell'impresa dipendono generalmente dal livello dei prezzi e dalla quantità di output che l'impresa intende produrre, e si indicano con $x_1(w_1, w_2, y)$ e $x_2(w_1, w_2, y)$. Sono dette **funzioni di domanda condizionata dei fattori** oppure

domande derivate dei fattori, e misurano la relazione tra i prezzi, l'output e la scelta ottimale dei fattori dell'impresa, *condizionata* dalla produzione di un certo livello di output.

La domanda condizionata dei fattori dà le scelte di minimizzazione dei costi in corrispondenza di un dato *livello* di output, mentre la domanda di fattori dà le scelte di massimizzazione del profitto in corrispondenza di un dato livello del *prezzo* dell'output.

Le funzioni di domanda condizionata dei fattori sono una costruzione ipotetica, e ci consente di determinare la quantità di ciascun fattore che impresa *impiegherebbe* se intendesse produrre un livello dato di output al costo minimo. Queste funzioni ci consentono tuttavia di distinguere il problema della determinazione del livello ottimo di output da quello della determinazione del metodo di produzione cui corrisponde il costo minimo.

ESEMPI: Minimizzazione dei costi con tecnologie specifiche

Perfetti complementi ($f(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$ **)**

Se vogliamo produrre y unità di output sono necessarie y unità di x_1 e y unità di x_2. I costi minimi di produzione saranno quindi:

$$c(w_1, w_2, y) = w_1 y + w_2 y = (w_1 + w_2) y.$$

Perfetti sostituti ($f(x_1,x_2)=x_1+x_2$)
Che cosa accade nel caso di questa tecnologia? Impresa sceglierà il meno costoso dei due. Il costo minimo di produzione di y unità di output sarà il più basso tra $w_1 y$ e $w_2 y$, ovvero:

$$c(w_1,w_2,y)=\min\{w_1 y, w_2 y\}=\min\{w_1,w_2\}y.$$

Cobb-Douglas (CD).
Se la funzione di produzione ha la forma:

$$f(x_1, x_2)=(x_1)^a (x_2)^b.$$

Con il calcolo differenziale possiamo dimostrare che la funzione di costo sarà:

$$c(w_1,w_2,y)=Kw_1^{\frac{a}{a+b}}w_2^{\frac{b}{a+b}}y^{\frac{1}{a+b}},$$

dove K è una costante che dipende da a e b. Per dettagli si veda appendice.

2. Rendimenti di scala e funzione di costo

Una tecnologia, come abbiamo visto, presenta rendimenti di scala crescenti, decrescenti o costanti quando $f(tx_1, tx_2)$ è maggiore, minore o uguale, rispettivamente, a $tf(x_1, x_2)$, per ogni $t > 1$. Esiste una relazione tra i rendimenti di scala e la funzione di costo.

Cominciamo con <u>rendimenti di scala costanti</u>. Supponiamo di aver risolto il problema della minimizzazione dei costi necessari per produrre 1 unità di output. La **funzione di costo per unità** sarà $c(w_1, w_2, 1)$.

Quale sarà allora il modo meno costoso di produrre *y* unità di output? Basterà utilizzare *y* volte la quantità di ogni fattore impiegata per produrre 1 unità di output. Quindi il costo minimo di produzione sarà la quantità $c(w_1, w_2, 1)y$. Nel caso di rendimenti di scala costanti la funzione di costo è <u>lineare nell'output</u>.

Nel caso di <u>rendimenti di scala crescenti</u> i costi aumentano meno che proporzionalmente rispetto all'output. Se impresa decide di raddoppiare la produzione, il costo sarà *meno* che doppio, dato il livello dei prezzi. Questo perché i rendimenti di scala sono crescenti: se impresa raddoppia quantità dei fattori impiegati, la produzione più che raddoppia. Quindi, se raddoppio la produzione, la quantità di fattori necessaria è meno che doppia.

Raddoppiare i fattori significa raddoppiare i costi: se ciascun input viene utilizzato in quantità meno che doppia anche i costi risulteranno meno che doppi. In altri termini, la funzione di costo aumenterà meno che proporzionalmente rispetto all'output. Analogamente, se tecnologia presenta rendimenti di scala decrescenti, la funzione di costo aumenterà più che proporzionalmente rispetto all'output. Quindi se la produzione raddoppia i costi aumentano più del doppio.

La **funzione del costo medio** rappresenta sinteticamente tutto ciò. Esprime il costo *unitario* di produzione di *y* unità di output:

$$AC(y) = \frac{c(w_1, w_2, y)}{y}.$$

Se la tecnologia presenta rendimenti di scala (RTS) costanti, la funzione di costo ha la forma: $c(w_1, w_2, y) = c(w_1, w_2, 1)\, y$. Questo implica che la funzione di costo medio sarà:

$$AC(y) = \frac{c(w_1, w_2, 1) y}{y} = c(w_1, w_2, 1).$$

Cioè il costo unitario rimane costante indipendentemente dalla quantità di output che l'impresa intende produrre. Se invece i RTS sono crescenti, i costi di produzione aumenteranno meno che proporzionalmente rispetto all'output, ovvero i costi medi saranno decrescenti all'aumentare dell'output. Infine, con RTS decrescenti, i costi medi saranno crescenti all'aumentare dell'output.

Una tecnologia può presentare regioni in cui i rendimenti di scala sono crescenti, costanti o decrescenti – l'output può aumentare più rapidamente, con la stessa rapidità o meno rapidamente della scala delle operazioni. Analogamente la funzione di costo può aumentare meno rapidamente, con la stessa rapidità o più velocemente dell'output in corrispondenza di diversi livelli di produzione. Quindi la funzione di costo medio può diminuire, rimanere costante o aumentare per quantità diverse di output.

3. Costi di lungo e breve periodo

La funzione di costo rappresenta il costo minimo che deve essere sostenuto per produrre una data quantità di output. Bisogna distinguere tra i costi minimi che l'impresa sostiene quando può variare tutti gli input e quelli che invece sostiene quando può variare solo alcuni fattori.

Il breve periodo è il periodo di tempo nel quale una parte dei fattori produttivi deve essere impiegata in quantità predeterminate. La **funzione di costo di breve periodo** rappresenta pertanto il costo minimo che deve essere sostenuto per produrre una data quantità di output, variando l'impiego dei soli fattori variabili.

Nel lungo periodo tutti i fattori sono invece liberi di variare, e la funzione di costo di lungo periodo esprime il costo minimo che deve essere sostenuto per produrre una data quantità di output, variando l'impiego di *tutti* i fattori di produzione.

Supponiamo che nel breve periodo il fattore 2 sia fisso ad un livello predeterminato $\bar{x}_2$, e che possa variare nel lungo periodo. La funzione di costo del breve periodo sarà:

$$
\begin{aligned}
&c_s(y, \bar{x}_2) = \min_{x_1} \; w_1 x_1 + w_2 \bar{x}_2 \\
&\textit{tale che} \quad f(x_1, \bar{x}_2) = y.
\end{aligned}
$$

Si noti che nel breve periodo il costo minimo di produzione di y unità di output dipende dalla quantità disponibile del fattore fisso.

Nel caso di due fattori, il problema di minimizzazione del costo è facilmente risolvibile: bisogna determinare la quantità minima di x_1 tale che $f(x_1, \bar{x}_2) = y$. Se vi sono molti fattori di produzione variabili nel breve periodo, invece, servono calcoli più elaborati.

La funzione di domanda di breve periodo del fattore 1 rappresenta la quantità del fattore 1 che minimizza i costi. Essa dipende generalmente sia dai prezzi dei fattori che dalla quantità disponibile dei fattori fissi; la domanda di breve periodo dei fattori è pertanto:

$$x_1 = x_1^s(w_1, w_2, \bar{x}_2, y)$$
$$x_2 = \bar{x}_2.$$

Da queste equazioni, per esempio, risulta che se un edificio ha delle dimensioni fisse nel breve periodo, il numero di lavoratori che impresa assumerà, a parità di prezzi dei fattori e livello dell'output, dipenderà dalle dimensioni dell'edificio. Si noti che data la definizione di costo di breve periodo si avrà:

$$c_s(y, \bar{x}_2) = w_1 x_1(w_1, w_2, \bar{x}_2, y) + w_2 \bar{x}_2,$$

e cioè il costo minimo di produzione di una quantità y di output è il costo associato all'impiego della quantità di input che minimizza i costi.

Per questo esempio, la funzione di costo di lungo periodo è la seguente:

$$\begin{aligned} &c(y) = \min_{x_1, x_2} \; w_1 x_1 + w_2 x_2 \\ &\textit{tale che} \quad f(x_1, x_2) = y. \end{aligned}$$

In questo caso entrambi i fattori sono liberi di variare. I costi di lungo periodo dipendono esclusivamente dalla quantità di output che l'impresa intende produrre, e dai prezzi dei fattori.

Se la funzione di lungo periodo è *c(y)* e le domande dei fattori nel lungo periodo sono

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(w_1, w_2, y), \\ x_2 &= x_2(w_1, w_2, y), \end{aligned}$$

allora la funzione di costo si può scrivere come

$$c(y) = w_1 x_1(w_1, w_2, y) + w_2 x_2(w_1, w_2, y).$$

I costi minimi, come nel caso precedente, sono quelli che l'impresa deve sostenere se la scelta dei fattori produttivi minimizza i costi.

4. Costi fissi e quasi-fissi

I costi fissi sono costi associati ai fattori fissi: non dipendono dal livello dell'output e devono essere sostenuti che l'impresa produca oppure no.

I costi quasi-fissi non dipendono dal livello dell'output,ma devono essere sostenuti solo se l'impresa produce una quantità positiva di output.

Nel lungo periodo, per la definizione dei fattori fissi, non vi sono costi fissi ma vi possono essere costi quasi-fissi. Questo succede, per esempio, quando si deve spendere una certa somma prima che sia possibile produrre un output qualsiasi.

5. Costi sommersi (*sunk*)

Sono un altro tipo di costi fissi. Esempio: supponiamo di avere preso in affitto un ufficio per un anno. Canone mensile è costo fisso, che paghiamo indipendentemente da quanto produciamo. Mettiamo di voler sistemare l'ufficio facendolo ridipingere ed acquistando dei mobili nuovi. Il costo della tinteggiatura è un costo fisso, ma è anche un **costo sommerso** dato che non si potrà recuperare quanto speso. Invece il costo dei mobili non è completamente sommerso perché potrei rivenderli: solo la differenza tra il prezzo tra i mobili nuovi ed usati rappresenta un costo sommerso.

Più in dettaglio. Supponiamo di voler prendere a prestito una somma di 20.000 euro all'inizio dell'anno con tasso di interesse del 10%. Firmiamo contratto per affitto di ufficio pagando in anticipo 12.000 euro per il canone annuale. Spendiamo 6.000 euro per i mobili e 2.000 euro per la tinteggiatura. Alla fine dell'anno ripaghiamo il prestito di 20.000 euro, più 2.000 di interessi, e rivendiamo i mobili usati per 5.000 euro.

I costi sommersi totali sono rappresentati dai 12.000 euro dell'affitto (se il contratto esclude il sub-affitto), dai 2.000 euro degli interessi, dai 2.000 euro della tinteggiatura, ma solo 1.000 euro dei mobili, visto che si possono recuperare 5.000 euro dalla vendita dei mobili usati.

La differenza tra costi sommersi e costi recuperabili può essere significativa. 100.000 euro spesi per 5 furgoni possono essere un investimento notevole, ma se gli autocarri possono essere rivenduti nel mercato dell'usato per 80.000 euro il costo sommerso è solo un 1/5 del valore a nuovo. Invece, se spendo 100.000 euro per l'acquisto di una pressa speciale fatta su ordinazione, che non può essere rivenduta, l'intera somma rappresenta un costo sommerso.

I costi sommersi possono avere un notevole <u>valore strategico</u> (vedere in relazione ai giochi dinamici e agli impegni vincolanti).

Riassunto

- La funzione di costo, $c(w_1, w_2, y)$, misura i costi minimi di produzione di una determinata quantità di output, dati i prezzi dei fattori;

- il comportamento di minimizzazione dei costi impone alcune restrizioni alle scelte dell'impresa. In particolare, le funzioni di domanda avranno inclinazione negativa;

- Esiste una stretta relazione tra i rendimenti di scala e di una tecnologia e la funzione di costo. Rendimenti *crescenti* di scala comportano un costo medio *decrescente*, rendimenti *decrescenti* di scala comportano un costo medio *crescente*, e rendimenti *costanti* di scala comportano un costo medio *costante*;

- i costi sommersi sono i costi non recuperabili.

Appendice: minimizzazione dei costi con tecniche di ottimizzazione

La minimizzazione dei costi dell'impresa è un problema di ottimizzazione vincolata:

$$\min_{x_1,x_2} w_1x_1 + w_2x_2$$
$$\textit{tale che} \quad y = f(x_1,x_2).$$

Un modo per risolvere è quello di sostituire il vincolo nella funzione obiettivo. Non qui: è possibile quando si hanno specifiche forme funzionali. Allora possiamo usare il metodo di Lagrange:

$$L = w_1x_1 + w_2x_2 - \lambda(f(x_1,x_2) - y).$$

Si devono calcolare le derivate rispetto a x_1, x_2 e λ. Le condizioni di primo ordine sono quindi

$$w_1 - \lambda\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 0,$$
$$w_2 - \lambda\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} - = 0,$$
$$f(x_1,x_2) - y = 0.$$

Possiamo trasformare le prime due e dividere la prima per la seconda ed ottenere:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\partial f(x_1,x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1,x_2)/\partial x_2}.$$

Si tratta della stessa condizione del primo ordine vista in precedenza nel testo: il saggio tecnico di sostituzione deve essere uguale al rapporto tra i prezzi dei fattori.

Vediamo queste condizioni nel caso della funzione di produzione Cobb-Douglas, con $f(x_1, x_2)=x_1^a x_2^b$. Il problema di minimizzazione dei costi diventa:

$$\begin{aligned} &\min_{x_1,x_2} w_1x_1 + w_2x_2 \\ &\textit{tale che} \quad y = x_1^a x_2^b. \end{aligned}$$

Abbiamo una forma funzionale specifica potremmo sostituire esprimendo il vincolo per x_2 come funzione di x_1:

$$x_2 = (yx_1^{-a})^{1/b},$$

sostituendo questa equazione nella funzione obiettivo, ottenendo il problema di minimizzazione non vincolata:

$$\min_{x_1} \quad w_1x_1 + w_2(yx_1^{-a})^{1/b}.$$

Si potrebbe ora derivare, porre uguale a zero, risolvere l'equazione risultante per ottenere x_1 in funzione di w_1, w_2 e y, così da ottenere la domanda condizionata dei fattori per x_1. Calcoli un po' complessi.

Usiamo secondo metodo con Lagrange. Le condizioni di primo ordine sono:

$$w_1 = \lambda \mathrm{a} x_1^{a-1} x_2^{b},$$
$$w_2 = \lambda \mathrm{b} x_1^{a} x_2^{b-1},$$
$$x_1^{a} x_2^{b} - y = 0.$$

Moltiplichiamo la prima espressione per x_1 e la seconda per x_2 per ottenere:

$$w_1 x_1 = \lambda \mathrm{a} x_1^{a} x_2^{b} = \lambda a y,$$
$$w_2 x_2 = \lambda \mathrm{b} x_1^{a} x_2^{b} = \lambda b y.$$

Abbiamo cioè che:

$$x_1 = \lambda \frac{ay}{w_1}, \tag{1.3}$$

$$x_2 = \lambda \frac{by}{w_2}. \tag{1.4}$$

Possiamo utilizzare la terza equazione per ottenere il valore di λ: sostituire le espressioni di x_1 e x_2 nella terza delle equazioni delle condizioni di primo ordine:

$$\left(\frac{\lambda a y}{w_1}\right)^{a} \left(\frac{\lambda b y}{w_2}\right)^{b} = y.$$

Risolviamo questa equazione per λ ottenendo così:

$$\lambda = (a^{-a} b^{-b} w_1^{a} w_2^{b} y^{1-a-b})^{\frac{1}{a+b}}$$

che insieme alle equazioni (1.3) e (1.4) ci permettono di ottenere le funzioni di domanda dei fattori:

$$x_1(w_1,w_2,y)=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}} w_1^{\frac{-b}{a+b}} w_2^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}},$$

$$x_2(w_1,w_2,y)=\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{a}{a+b}} w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{\frac{-a}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}.$$

Possiamo ora trovare la funzione di costo esprimendo i costi relativi alle scelte di minimizzazione dei costi dell'impresa, cioè

$$c(w_1,w_2,y)=w_1x_1(w_1,w_2,y)+w_2x_2(w_1,w_2,y),$$

ovvero

$$c(w_1,w_2,y)=\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}}+\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{a}{a+b}}\right] w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}.$$

Si noti che i costi aumentano più che proporzionalmente, proporzionalmente, meno che proporzionalmente rispetto all'output, a seconda che $a + b$ sia rispettivamente minore, uguale o maggiore di 1. Ciò è legato al fatto che la tecnologia CD presenta rendimenti di scala crescenti, costanti o decrescenti a seconda del valore di $a + b$.