

Modelli Stocastici per la Finanza e le Assicurazioni

CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN METODI QUANTITATIVI PER LA FINANZA

A.A. 2007/2008

DOCENTE: Marco Minozzo

CREDITI (CFU): 10

PROGRAMMA (definitivo)

Spazi di probabilità e assiomi di Kolmogorov

Richiami di calcolo combinatorio: permutazioni, disposizioni, combinazioni, disposizioni con ripetizione, permutazioni tra elementi non tutti distinti.

Spazi di probabilità: spazio campionario, eventi, algebre degli eventi, sigma-algebre, sigma-algebra di Borel, funzione di probabilità e assiomi di Kolmogorov, primi teoremi della probabilità, spazi di probabilità finiti e infiniti, misura di Lebesgue, interpretazioni della probabilità, alberi degli eventi.

Probabilità condizionata: definizione elementare di probabilità condizionata di un evento rispetto ad un altro evento, proprietà, legge del prodotto, teorema delle probabilità totali, teorema di Bayes, indipendenza tra eventi, passeggiata aleatoria.

Variabili aleatorie

Variabili aleatorie: misurabilità, funzione di ripartizione, variabili aleatorie discrete, distribuzione di probabilità, variabili aleatorie assolutamente continue, densità di probabilità, variabili aleatorie continue singolari.

Trasformazioni di variabili aleatorie: trasformazioni biunivoche, distribuzione log-normale, trasformazioni non biunivoche, trasformazione integrale di probabilità.

Valore atteso

Teoria dell'integrazione: richiami sull'integrale di Riemann, integrale di Riemann-Stieltjes, integrale di Lebesgue (generalizzato), valore atteso, interpretazioni del valore atteso, paradosso di San Pietroburgo (cenni).

Valore atteso di una funzione di una variabile aleatoria: risultati principali, varianza, proprietà del valore atteso e della varianza.

Disuguaglianze notevoli: disuguaglianza di Markov, disuguaglianza di Tchebycheff, disuguaglianza di Jensen.

Momenti: momenti assoluti, momenti centrali, funzione generatrice dei momenti.

Variabili aleatorie multidimensionali

Variabili aleatorie multidimensionali: funzione di ripartizione congiunta, funzioni di ripartizione marginali, variabili aleatorie multidimensionali discrete, distribuzioni di probabilità congiunte e marginali, variabili aleatorie multidimensionali continue, funzioni di densità congiunte e marginali.

Distribuzioni condizionate: funzione di ripartizione condizionata, distribuzione di probabilità condizionata per variabili aleatorie discrete, funzione di densità condizionata per variabili aleatorie continue, interpretazione geometrica della densità condizionata, alcune generalizzazioni del teorema delle probabilità totali.

Indipendenza tra variabili aleatorie: definizioni, proprietà, esempi notevoli.

Funzioni di variabili aleatorie multidimensionali

Funzioni di variabili aleatorie multidimensionali: valore atteso di funzioni di variabili aleatorie, valore atteso di una combinazione lineare, covarianza, coefficiente di correlazione di Bravais, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, varianza di una combinazione lineare, valore atteso e varianza della media campionaria.

Valore atteso condizionato: valore atteso condizionato rispetto ad un'altra variabile aleatoria, probabilità condizionata rispetto ad una variabile aleatoria, varianza condizionata rispetto ad un'altra variabile aleatoria, principali proprietà.

Funzione generatrice dei momenti congiunta: momenti misti assoluti, momenti misti centrali, funzione generatrice dei momenti congiunta, principali proprietà.

Distribuzione normale bidimensionale: densità congiunta, funzione generatrice dei momenti congiunta, valori attesi, varianze, covarianza e coefficiente di correlazione di Bravais, densità marginali, densità condizionate.

Distribuzione di funzioni di variabili aleatorie multidimensionali

Metodo della funzione di ripartizione: esempi notevoli.

Distribuzione del minimo e del massimo: esempi notevoli.

Distribuzione della somma e della differenza di due variabili aleatorie: formula di convoluzione, esempi.

Distribuzione del prodotto e del quoziente: esempi notevoli.

Distribuzione della somma di un numero aleatorio di variabili aleatorie: esempi notevoli.

Metodo della funzione generatrice dei momenti: somma di variabili aleatorie indipendenti, somma di variabili aleatorie normali, esempi notevoli.

Metodo della trasformazione per variabili aleatorie continue (cenni).

Convergenza di successioni di variabili aleatorie e principali teoremi limite

Richiami sui limiti di successioni di numeri reali.

Principali modi di convergenza: convergenza quasi certa (con probabilità uno), convergenza in probabilità, convergenza in distribuzione, convergenza in media quadratica, esempi e controesempi notevoli.

Legge debole dei grandi numeri: teorema di Tchebycheff, legge (debole) dei grandi numeri di Bernoulli per frequenze relative, esempi notevoli.

Teorema del limite centrale: dimostrazione con la funzione generatrice dei momenti dell'analogo del teorema di Lindeberg-Lèvy, distribuzioni limite e distribuzioni asintotiche, approssimazione della distribuzione binomiale alla normale, esempi notevoli.

Legge forte dei grandi numeri: lemma di Borel, variante della disuguaglianza di Tchebycheff con il momento quarto, legge forte dei grandi numeri di Borel, esempi notevoli.

Statistiche d'ordine: definizioni, distribuzioni marginali delle statistiche d'ordine, distribuzioni asintotiche.

Funzione di ripartizione empirica: definizioni, distribuzione della funzione di ripartizione empirica, enunciato del teorema di Glivenko-Cantelli.

Valore atteso condizionato rispetto ad una partizione e rispetto ad una sigma-algebra

Valore atteso condizionato rispetto ad un evento: definizione e proprietà.

Probabilità condizionata di un evento rispetto ad una partizione: definizioni, algebra indotta da una partizione, ordinamento tra partizioni, algebre indipendenti, probabilità condizionata dell'unione di due eventi, valore atteso della probabilità condizionata.

Probabilità condizionata di un evento rispetto ad una variabile aleatoria: definizioni, partizione indotta da una variabile aleatoria, proprietà.

Valore atteso condizionato di una variabile aleatoria rispetto ad una partizione: definizioni, valore atteso condizionato di una combinazione lineare, valore atteso del valore atteso condizionato, misurabilità rispetto ad una partizione, principali proprietà.

Valore atteso condizionato rispetto ad una sigma-algebra: definizioni, analogo con il valore atteso condizionato rispetto ad una partizione, principali proprietà.

Processi stocastici a tempo discreto

Filtrazioni: definizioni, filtrazioni indotte, esempi notevoli.

Processi stocastici: definizioni, processi stocastici a tempo discreto, processi stocastici a tempo continuo, distribuzioni finito-dimensionali, processi stazionari in senso forte e debole (cenni), processi gaussiani (cenni), processi a incrementi indipendenti (cenni).

Processi markoviani: definizioni, catene di Markov (cenni), il problema della rovina del giocatore (cenni).

Martingale a tempo discreto

Martingale rispetto a partizioni: definizioni, esempi notevoli, principali risultati, tempi di arresto, impossibilità di una strategia di arresto vincente.

Trasformate di martingala: differenza di martingala, sequenze predicibili, trasformata di martingala, impossibilità di una strategia di scommesse vincente.

Martingale rispetto a sigma-algebre: definizioni.

Processi stocastici a tempo continuo

Processi stocastici a tempo continuo: definizioni, filtrazioni, processi adattati ad una filtrazione; martingale, processi markoviani.

Moto browniano: definizione di moto browniano (processo di Wiener), definizione rispetto ad una filtrazione, distribuzioni finito-dimensionali, proprietà di martingala, non derivabilità e variazione infinita delle traiettorie (cenni), variazione quadratica, proprietà di Markov.

Integrale stocastico

Integrale stocastico di Itô: integrale di Itô di un processo semplice rispetto al moto browniano, proprietà di martingala, proprietà di isometria, variazione quadratica.

Integrale di Itô di un processo generico: definizione, principali proprietà, esempi notevoli.

Formula di Itô: analogo a tempo discreto della formula di Itô per trasformate di martingala, formula di Itô per il moto browniano.

Cambio di misura: derivata di Radon-Nikodým nel caso di uno spazio campionario finito (cenni), processo “derivata di Radon-Nikodým” nel caso di uno spazio campionario finito (cenni).

GUIDA ALLO STUDIO DEI LIBRI DI TESTO

Libri di testo

A. M. Mood, F. A. Graybill, D. C. Boes (1991). *Introduzione alla Statistica*. McGraw-Hill, Milano.

R. V. Hogg, A. T. Craig (1994). *Introduction to Mathematical Statistics, 5th Edition*. Macmillan.

B. V. Gnedenko (1979). *Teoria della Probabilità*. Editori Riuniti, Roma.

A. N. Shiryaev (1996). *Probability, 2nd Edition*. Springer, New York.

S. E. Shreve (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer, New York.

S. E. Shreve (2004). *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*. Springer, New York.

Materiale integrativo, appunti, esercizi e soluzioni distribuiti a cura del docente.

A. M. Mood, F. A. Graybill, D. C. Boes (1991). *Introduzione alla Statistica*. McGraw-Hill, Milano.

CAPITOLO 1. Probabilità

1.1. Introduzione

1.2. Concetto di probabilità

1.2.2. Introduzione [lettura]

1.2.2. Probabilità classica [lettura]

1.2.3. Probabilità frequentista [lettura]

1.3. Definizione assiomatica di probabilità

1.3.1. Modelli di probabilità

1.3.2. Una parentesi: la teoria degli insiemi [ripasso]

1.3.3. Definizioni di spazio campionario e di evento

1.3.4. Definizione di probabilità

1.3.5. Spazi campionari finiti [no Esempio 1.20]

1.3.6. Probabilità condizionata e indipendenza [no Esempio 1.28]

CAPITOLO 2. Variabili casuali, funzioni di ripartizione e valore atteso

2.1. Introduzione

- 2.2. Variabile casuale e funzione di ripartizione
 - 2.2.1. Introduzione
 - 2.2.2. Definizioni
- 2.3. Funzioni di densità
 - 2.3.1. Variabili casuali discrete
 - 2.3.2. Variabili casuali continue
 - 2.3.3. Altre variabili casuali
- 2.4. Valori attesi e momenti
 - 2.4.1. Media
 - 2.4.2. Varianza
 - 2.4.3. Valore atteso di una funzione di una variabile casuale
 - 2.4.4. Disuguaglianza di Tchebycheff
 - 2.4.5. Disuguaglianza di Jensen
 - 2.4.6. Momenti e funzione generatrice dei momenti

CAPITOLO 3. Particolari famiglie parametriche di distribuzioni unidimensionali

- 3.1. Introduzione
- 3.2. Distribuzioni discrete
 - 3.2.1. Distribuzione uniforme discreta **[ripasso]**
 - 3.2.2. Distribuzione di Bernoulli e distribuzione binomiale **[ripasso]**
 - 3.2.3. Distribuzione ipergeometrica **[no]**
 - 3.2.4. Distribuzione di Poisson **[ripasso; no Teorema 3.7 e Teorema 3.8]**
 - 3.2.5. Distribuzione geometrica e binomiale negativa **[ripasso; binomiale negativa: solo definizione]**
 - 3.2.6. Altre distribuzioni discrete **[no]**
- 3.3. Distribuzioni continue
 - 3.3.1. Distribuzione uniforme o rettangolare **[ripasso]**
 - 3.3.2. Distribuzione normale **[ripasso; no pag. 118]**
 - 3.3.3. Distribuzioni gamma ed esponenziali **[ripasso; distribuzione gamma: lettura]**
 - 3.3.4. Distribuzione beta **[lettura]**
 - 3.3.5. Altre distribuzioni continue **[lettura]**
- 3.4. Commenti
 - 3.4.1. Approssimazioni **[no]**
 - 3.4.2. Relazione fra esponenziale e Poissoniana **[lettura]**
 - 3.4.3. Mistura di distribuzioni e distribuzioni troncate **[lettura]**

CAPITOLO 4. Distribuzioni congiunte e condizionate, indipendenza stocastica e valore atteso

- 4.1. Introduzione
- 4.2. Funzioni di ripartizione congiunte
 - 4.2.1. Funzione di ripartizione
 - 4.2.2. Funzioni di densità congiunte per variabili casuali discrete **[no pag. 147]**
 - 4.2.3. Funzioni di densità congiunte per variabili casuali continue
- 4.3. Distribuzioni condizionate e indipendenza stocastica
 - 4.3.1. Funzioni di ripartizione condizionate per variabili casuali discrete
 - 4.3.2. Funzioni di ripartizione condizionate per variabili casuali continue
 - 4.3.3. Ancora sulle funzioni di ripartizione condizionate
 - 4.3.4. Indipendenza
- 4.4. Valore atteso
 - 4.4.1. Definizione
 - 4.4.2. Covarianza e coefficiente di correlazione
 - 4.4.3. Valori attesi condizionati
 - 4.4.4. Momenti misti e funzione generatrice dei momenti congiunta
 - 4.4.5. Indipendenza e valore atteso
 - 4.4.6. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz
- 4.5. Distribuzione normale bidimensionale

- 4.5.1. Funzione di densità
- 4.5.2. Funzione generatrice dei momenti e momenti
- 4.5.3. Densità marginali e condizionate

CAPITOLO 5. Distribuzioni di funzioni di variabili casuali

- 5.1. Introduzione
- 5.2. Valori attesi di funzioni di variabili casuali
 - 5.2.1. Due metodi per ottenere il valore atteso
 - 5.2.2. Somma di variabili casuali
 - 5.2.3. Prodotto e quoziente **[no Formula 5.13 e Teorema 5.4]**
- 5.3. Metodo della funzione di ripartizione
 - 5.3.1. Descrizione del metodo
 - 5.3.2. Distribuzione del minimo e del massimo
 - 5.3.3. Distribuzione della somma e della differenza di due variabili
 - 5.3.4. Distribuzione del prodotto e del quoziente **[tutto tranne Teorema 5.8]**
- 5.4. Metodo della funzione generatrice dei momenti
 - 5.4.1. Descrizione del metodo
 - 5.4.2. Distribuzione della somma di variabili casuali indipendenti **[no Esempio 5.13]**
- 5.5. La trasformazione $Y = g(X)$
 - 5.5.1. La distribuzione di $Y = g(X)$
 - 5.5.2. Trasformazione integrale di probabilità
- 5.6. Trasformazioni
 - 5.6.1. Variabili casuali discrete
 - 5.6.2. Variabili casuali continue **[lettura]**

CAPITOLO 6. Campionamento e distribuzioni campionarie

- 6.1. Introduzione
- 6.2. Campionamento **[no]**
- 6.3. Media campionaria
 - 6.3.1. Media e varianza
 - 6.3.2. Legge dei grandi numeri
 - 6.3.3. Teorema limite centrale
 - 6.3.4. Distribuzioni di Bernoulli e di Poisson
 - 6.3.5. Distribuzione esponenziale **[no]**
 - 6.3.6. Distribuzione uniforme **[no]**
 - 6.3.7. Distribuzione di Cauchy **[no]**
- 6.4. Campionamento da distribuzioni normali **[no]**
- 6.5. Statistiche d'ordine
 - 6.5.1. Definizione e distribuzioni **[no pag. 260-261]**
 - 6.5.2. Distribuzione di funzioni delle statistiche d'ordine **[no]**
 - 6.5.3. Distribuzioni asintotiche **[no Teorema 6.16]**
 - 6.5.4. Funzione di ripartizione campionaria

CAPITOLO 11. Metodi non parametrici

- 11.1. Introduzione
- 11.2. Inferenze riguardanti la funzione di ripartizione
 - 11.2.1. Funzione di ripartizione empirica o campionaria **[no Formula 11.7]**
 - 11.2.2. Test di adattamento di Kolmogorov-Smirnov **[no]**
 - 11.2.3. Fasce di confidenza per la funzione di ripartizione **[no]**

APPENDICE A. Appendice matematica

- A.1. Introduzione
- A.2. Calcolo combinatorio

- A.2.1. Notazione di sommatoria e di produttoria **[ripasso]**
- A.2.2. Simbolo combinatorio e fattoriale e convenzioni **[ripasso]**
- A.2.3. Formula di Stirling **[no]**
- A.2.4. Teorema binomiale e multinomiale **[ripasso; no multinomiale]**
- A.3. Analisi matematica
 - A.3.1. Preliminari **[ripasso]**
 - A.3.2. Serie di Taylor **[ripasso]**
 - A.3.3. Funzione beta e funzione gamma **[lettura]**

R. V. Hogg, A. T. Craig (1994). *Introduction to Mathematical Statistics, 5th Edition.* Macmillan.

CHAPTER 5. Limiting Distributions

- 5.1. Limiting Distributions
- 5.2. Stochastic Convergence **[no]**
- 5.3. Limiting Momen-Generating Functions **[no]**
- 5.4. The Central Limit Theorem **[no]**
- 5.5. Some Theorem on Limiting Distributions **[no]**

B. V. Gnedenko (1979). *Teoria della Probabilità.* Editori Riuniti, Roma.

CAPITOLO VI. Legge dei grandi numeri

- § 31. Fenomeni su vasta scala e legge dei grandi numeri **[lettura]**
- § 32. Legge dei grandi numeri nella forma di Čebyšev **[no]**
- § 33. Condizione necessaria e sufficiente per la legge dei grandi numeri **[no]**
- § 34. Legge forte dei grandi numeri **[no pagine 218-223]**

A. N. Shiryaev (1996). *Probability, 2nd Edition.* Springer, New York.

CHAPTER 1. Elementary Probability Theory

- §8. Conditional Probabilities and Mathematical Expectation with Respect to Decompositions
- §11. Martingales. Some Applications to the Random Walk **[no Theorem 2]**

S. E. Shreve (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models.* Springer, New York.

CHAPTER 3. Brownian Motion

- 3.1. Introduction
- 3.2. Scaled Random Walks
 - 3.2.1. Symmetric Random Walk **[lettura]**
 - 3.2.2. Increments of the Symmetric Random Walk **[lettura]**
 - 3.2.3. Martingale Property for the Symmetric Random Walk **[lettura]**
 - 3.2.4. Quadratic Variation of the Symmetric Random Walk **[lettura]**
 - 3.2.5. Scaled Symmetric Random Walk **[lettura]**
 - 3.2.6. Limiting Distribution of the Scaled Random Walk **[lettura]**
 - 3.2.7. Log-Normal Distribution as the Limit of the Binomial Model **[lettura]**
- 3.3. Brownian Motion
 - 3.3.1. Definition of Brownian Motion
 - 3.3.2. Distribution of Brownian Motion
 - 3.3.3. Filtration for Brownian Motion
 - 3.3.4. Martingale Property for Brownian Motion
- 3.4. Quadratic Variation

- 3.4.1. First-Order Variation [**lettura**]
- 3.4.2. Quadratic Variation
- 3.4.3. Volatility of Geometric Brownian Motion [**no**]
- 3.5. Markov Property

CHAPTER 4. Stochastic Calculus

- 4.1. Introduction
- 4.2. Itô's Integral for Simple Integrand
 - 4.2.1. Construction of the Integral
 - 4.2.2. Properties of the Integral
- 4.3. Itô's Integral for General Integrand
- 4.4. Itô-Doebelin Formula
 - 4.4.1. Formula for Brownian Motion
 - 4.4.2. Formula for Itô Processes [**no**]
 - 4.4.3. Examples [**no**]

S. E. Shreve (2004). *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*. Springer, New York.

CHAPTER 3. State Prices

- 3.1. Change of Measure [**lettura**]
- 3.2. Radon-Nikodým Derivative Process [**lettura**]

Testi di approfondimento generici di calcolo delle probabilità

- P. Baldi (2007). *Calcolo delle Probabilità*. McGraw-Hill, Milano
- G. Casella, R. L. Berger (2002). *Statistical Inference, 2nd Edition*. Duxbury Advanced Series.
- D. M. Cifarelli (1998). *Introduzione al Calcolo delle Probabilità*. McGraw-Hill, Milano.
- W. Feller (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, 3rd Edition, Volume 1*. Wiley.
- J. Jacod, P. Protter (2000). *Probability Essentials*. Springer, New York.
- S. Lipschutz (1975). *Calcolo delle Probabilità, Collana SCHAUM*. ETAS Libri.

Testi di approfondimento specifici di calcolo stocastico

- P. Baldi (1984). *Equazioni Differenziali Stocastiche e Applicazioni, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, n. 28*. Pitagora Editrice, Bologna.
- G. Da Prato (1998). *Introduction to Differential Stochastic Equations, 2nd Edition, Collana Appunti*. Scuola Normale Superiore, Pisa.
- T. Mikosch (1999). *Elementary Stochastic Calculus With Finance in View*. World Scientific, Singapore.
- M. Musiela, M. Rutkowski (1997). *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer, New York.
- P. Protter (1990). *Stochastic Integration and Differential Equations: A New Approach*. Springer, New York.