Marco Minozzo e Annamaria Guolo

Laurea in Economia del Commercio Internazionale
Laurea in Economia e Amministrazione delle Imprese
Università degli Studi di Verona (sede di Vicenza)

Calcolo delle Probabilità
Soluzioni 1. Spazio campionario ed eventi

Introduzione

SPAZIO CAMPIONARIO

Esperimento aleatorio. Un esperimento si dice *aleatorio* (o casuale) se il suo risultato non è deterministicamente prevedibile, cioè se singole *prove* (esecuzioni) dello stesso esperimento possono dar luogo a risultati diversi.

Esempi di esperimenti aleatori sono dati da molti giochi di sorte come il lancio di una moneta, il lancio di due dadi, ecc. I possibili esiti di un esperimento aleatorio devono essere conosciuti in anticipo e catalogabili in modo preciso.

Evento elementare. Il singolo risultato di un esperimento casuale si chiama *evento elementare* e viene indicato con ω.

Spazio campionario. L'insieme di tutti gli eventi elementari viene chiamato spazio dei risultati o *spazio campionario* e viene indicato con Ω.

Nel caso in cui un esperimento casuale sia composto di un numero *finito* o *infinitamente numerabile* di eventi elementari, Ω si dice discreto. Nel caso in cui invece il numero di eventi elementari non sia infinitamente numerabile, Ω si dice continuo.

Evento aleatorio. Si chiama *evento* un insieme di eventi elementari, ossia un sottoinsieme dello spazio campionario Ω.

EVENTI

Della teoria degli insiemi sono utili le seguenti definizioni.

Insieme complementare. Dato un insieme A, si chiama insieme *complementare* di A l'insieme $\overline{A}$ dei punti di Ω che non appartengono ad A.

Insieme unione. Si chiama insieme *unione* di A e B, e si indica con $A \cup B$ l'insieme costituito da tutti i punti che appartengono ad A o a B, oppure ad entrambi:

$$A \cup B = \{\omega : \omega \in A \ \text{ oppure } \ \omega \in B\}.$$

Insieme intersezione. Si chiama insieme *intersezione* di A e B, e si indica con $A \cap B$ l'insieme costituito da tutti i punti di Ω che appartengono sia ad A che a B:

$$A \cap B = \{\omega : \omega \in A \ \text{ e } \ \omega \in B\}.$$

Insiemi disgiunti. Gli insiemi A e B si dicono *disgiunti* se non hanno punti in comune; in tal caso $A \cap B = \emptyset$, dove $\emptyset$ indica l'insieme vuoto.

Insieme differenza. Si chiama insieme *differenza* tra A e B (o complementare relativo di B rispetto a A), indicato con $A - B$, o $A \backslash B$, l'insieme dei punti di A che non appartengono ad B:

$$A - B = \{\omega : \omega \in A \ \text{ e } \ \omega \notin B\}.$$

Sottoinsieme. Dati due insiemi A e B, B si dice *sottoinsieme* di A, e si indica con $B \subseteq A$, se ogni elemento di B è anche un elemento di A.

Si richiamano inoltre le seguenti proprietà insiemistiche.

Proprietà di idempotenza.

$$A \cup A = A, \qquad A \cap A = A.$$

Proprietà commutativa.

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

Proprietà associativa.

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Proprietà distributiva.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Leggi di identità.

$$A \cup \emptyset = A, \qquad A \cap \emptyset = \emptyset,$$
$$A \cup \Omega = \Omega, \qquad A \cap \Omega = A.$$

Leggi di complementarietà.

$$A \cup \overline{A} = \Omega, \qquad A \cap \overline{A} = \emptyset,$$
$$\overline{(\,\overline{A}\,)} = A, \qquad \overline{\Omega} = \emptyset, \quad \overline{\emptyset} = \Omega.$$

Leggi di De Morgan.

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Più sottoinsiemi di uno steso insieme Ω possono formare particolari famiglie di insiemi. Sono importanti le seguenti due famiglie.

Algebra di insiemi. Dato un insieme Ω, si chiama *algebra* $\mathcal{A}$, un insieme di sottoinsiemi di Ω tale che:

i) $\Omega \in \mathcal{A}$;
ii) se $A \in \mathcal{A}$, allora $\overline{A} \in \mathcal{A}$;
iii) se $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, allora $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$.

σ-algebra di insiemi. Si chiama *σ-algebra* $\mathcal{A}$, un'algebra di insiemi per cui vale l'ulteriore proprietà:

iii bis) se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, allora $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathcal{A}$.

La teoria della probabilità, ed in particolare le nozioni di spazio campionario e di evento aleatorio, hanno le loro fondamenta nella teoria degli insiemi e per ogni concetto presente nella teoria degli insiemi esiste un corrispondente concetto nella teoria della probabilità.

Notazione	Teoria degli insiemi	Teoria della probabilità
ω	elemento, punto	risultato, evento elementare
Ω	insieme di punti	spazio campionario, evento certo
$\mathcal{A}$	algebra (σ-algebra) di insiemi	algebra (σ-algebra) di eventi
$A \in \mathcal{A}$	insieme di punti	evento (se $\omega \in A$, allora A si verifica)
$\overline{A} = \Omega \backslash A$	complemento di A	evento che A non si verifica
$A \cup B$	unione di A e B	evento che A oppure B si verificano
$A \cap B$	intersezione di A e B	evento che A e B si verificano entrambi
$\emptyset$	insieme vuoto	evento impossibile
$A \cap B = \emptyset$	A e B disgiunti	gli eventi A e B sono mutuamente esclusivi, non possono verificarsi simultaneamente
$A \cup B$, con $A \cap B = \emptyset$	unione di insiemi disgiunti	evento che solo A oppure solo B si verifica
$A \backslash B$	differenza tra A e B	evento che A si verifica ma non B
$A \Delta B$	differenza simmetrica di insiemi $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$	evento che A o B si verificano, ma non entrambi
$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$	unione di A_1, A_2, ...	evento che almeno un evento A_1, A_2, ... si verifichi
$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$	intersezione di A_1, A_2, ...	evento che tutti gli eventi A_1, A_2, ... si verificano

PROBABILITÀ

Funzione di probabilità. Si dice funzione di probabilità una funzione d'insieme a valori reali definita su una σ-algebra di eventi $\mathcal{A}$, che soddisfa alle seguenti proprietà:

i) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$;

ii) $\mathsf{P}(A) \geq 0$, per ogni $A \in \mathcal{A}$;

iii) $\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) + \cdots$, per ogni successione di eventi in $\mathcal{A}$ a due a due incompatibili.

Spazio di probabilità. La terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P}(\cdot))$ si chiama spazio di probabilità.

La funzione di probabilità gode delle seguenti proprietà.

Proprietà 1. Per ogni sottoinsieme A contenuto in Ω ed appartenente ad $\mathcal{A}$, $\mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$.

Dimostrazione. Facilmente, si ha:

$$1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(A \cup \overline{A}) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\overline{A}),$$

da cui segue la tesi. **Q.E.D.**

Proprietà 2. $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$.

Dimostrazione. Basta considerare:

$$1 = \mathsf{P}(\Omega) = \mathsf{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathsf{P}(\Omega) + \mathsf{P}(\emptyset) = 1 + \mathsf{P}(\emptyset).$$

Q.E.D.

Proprietà 3. Per ogni sottoinsieme A di Ω appartenente ad $\mathcal{A}$, $0 \le \mathsf{P}(A) \le 1$.

Dimostrazione. Chiaramente $\mathsf{P}(A) \ge 0$. Inoltre, siccome $A \cup \overline{A} = \Omega$ e $A \cap \overline{A} = \emptyset$ si ha che

$$\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\overline{A}) = 1.$$

Quindi, per assurdo, se fosse $\mathsf{P}(A) > 1$, seguirebbe che $\mathsf{P}(\overline{A}) < 0$ il che sarebbe in contraddizione con ii), per cui deve essere che $\mathsf{P}(A) \le 1$. **Q.E.D.**

Proprietà 4. (*Legge della somma*) Dati due insiemi A_1 e A_2 contenuti in Ω ed appartenenti ad $\mathcal{A}$,

$$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2) = \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) - \mathsf{P}(A_1 \cap A_2).$$

Dimostrazione. Vedasi riferimenti bibliografici.

Proprietà 5. Per ogni sottoinsieme $A \subseteq B$, si ha $\mathsf{P}(A) \le \mathsf{P}(B)$.

Dimostrazione. Essendo $B = A \cup (B - A)$ e $A \cap (B - A) = \emptyset$, si ha

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B - A),$$

da cui, essendo $\mathsf{P}(B - A) \ge 0$, segue la tesi. **Q.E.D.**

Esercizio A. a) Lo spazio campionario è dato dall'insieme

$$\begin{array}{rlllll} \Omega = & \{(1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), \\ & (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), \\ & (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), \\ & (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), \\ & (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5)\}. \end{array}$$

L'evento B_1 è formato dagli eventi elementari disposti nelle prime tre righe, mentre l'evento B_2 è formato dagli eventi elementari disposti nelle prime tre colonne. L'evento $B_1 \cap B_2$ può essere descritto esplicitamente come:

$$B_1 \cap B_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}.$$

b) Nel caso in cui le palline vengano estratte senza reinserimento lo spazio campionario può essere così descritto:

$$\begin{array}{rlllll} \Omega = & \{ & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), \\ & (2,1), & & (2,3), & (2,4), & (2,5), \\ & (3,1), & (3,2), & & (3,4), & (3,5), \\ & (4,1), & (4,2), & (4,3), & & (4,5), \\ & (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4) & \}. \end{array}$$

Anche in questo caso l'evento B_1 è formato dagli eventi elementari disposti nelle prime tre righe, mentre l'evento B_2 è formato dagli eventi elementari disposti nelle prime tre colonne. L'evento intersezione di B_1 e B_2 è dato da $B_1 \cap B_2 = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$.

Esercizio B. a) Lo spazio campionario è dato da $\Omega = \{(C,C),(C,T),(T,C),(T,T)\}$ il quale ha cardinalità Card$(\Omega) = 4$.
b) Lo spazio campionario è dato da $\Omega = \{(C_i, C_h) : i, h = 1, \ldots, 52, i \neq h\}$ con cardinalità Card$(\Omega) = 52 \cdot 51 = 2652$.

Esercizio C. a) Lo spazio campionario è dato da $\Omega = \{(r_1, \ldots, r_{10}) : r_i \in \{$"si","no"$\}, i = 1, \ldots, 10\}$ con cardinalità Card$(\Omega) = 2^{10}$.
b) Il sottospazio richiesto è dato da $A = \{(r_1, \ldots, r_{10}) :$ nella 10-pla compaiono 5 "si" e 5 "no"$\}$ con cardinalità Card$(A) = 10!/(5! \cdot 5!) = 252$.
c) Lo spazio campionario è dato da $\Omega = \{(r_1, \ldots, r_{10}) : r_i \in \{$"si", "no", "non so"$\}, i = 1, \ldots, 10\}$ con cardinalità Card$(\Omega) = 3^{10}$. Il sottospazio richiesto è invece dato da $A = \{(r_1, \ldots, r_{10}) :$ nella 10-pla compaiono 4 "si", 4 "no" e 2 "non so"$\}$ con cardinalità Card$(A) = 10!/(4! \cdot 4! \cdot 2!) = 3150$.

Esercizio D. a) Lo spazio campionario è dato da

$$\begin{array}{rl} \Omega = & \{(T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5),(T,6), \\ & (C,1),(C,2),(C,3),(C,4),(C,5),(C,6)\}, \end{array}$$

con cardinalità Card$(\Omega) = 12$.
b) Gli eventi richiesti sono dati da

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{(T,2),(T,4),(T,6)\}, \\ B & = & \{(T,1),(T,2),(T,3),(T,5),(C,1),(C,2),(C,3),(C,5)\}, \\ C & = & \{(C,1),(C,2),(C,3),(C,5)\}. \end{array}$$

c) Gli eventi richiesti sono dati da

$$
\begin{array}{rcl}
(i) & A \cup B & = \{(T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5),(T,6),(C,1),(C,2),(C,3),(C,5)\}, \\
(ii) & B \cap C & = \{(C,1),(C,2),(C,3),(C,5)\}, \\
(iii) & B - (A \cup C) & = \{(T,1),(T,3),(T,5)\}.
\end{array}
$$

d) Gli eventi A e C sono incompatibili, infatti $A \cap C = \emptyset$.