

## Calcolo delle Probabilità

### Esercitazione 12. Variabili aleatorie doppie discrete: covarianza, correlazione e valore atteso condizionato

**Esercizio A.** Si consideri l'Esercizio C dell'Esercitazione 11.

- a) Calcolare  $\text{Cov}(X, Y)$  e  $\rho_{XY}$  tra le variabili aleatorie  $X$  ed  $Y$  relativamente alla distribuzione congiunta A.
- b) Calcolare  $\text{Cov}(X, Y)$  e  $\rho_{XY}$  tra le variabili aleatorie  $X$  ed  $Y$  relativamente alla distribuzione congiunta B.

**Esercizio B.** Sia  $X$  una variabile aleatoria con la seguente distribuzione di probabilità

$x$	-2	-1	1	2
$f(x)$	1/4	1/4	1/4	1/4

e sia  $Y = X^2$ .

- a) Determinare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria  $Y$ .
- b) Determinare la distribuzione di probabilità congiunta.
- c) Calcolare  $\text{Cov}(X, Y)$  e  $\rho_{XY}$ . (N.B. Si osservi che  $\text{Cov}(X, Y)$  e  $\rho_{XY}$  sono pari a 0, pur avendo che  $X$  ed  $Y$  non sono indipendenti (anzi,  $Y$  è una funzione di  $X$ )).

**Esercizio C.** Verificare le seguenti proprietà:

- a)  $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$ ;
- b)  $\rho(X, X) = 1$ ;
- c)  $\rho(X, -X) = -1$ ;
- d1)  $\rho(X, Y) = 1$  se  $Y = a + bX$ ,  $b > 0$ ;
- d2)  $\rho(X, Y) = -1$  se  $Y = a + bX$ ,  $b < 0$ ;
- e)  $\rho(aX + b, cY + d) = \pm\rho(X, Y)$ ,  $a, c \neq 0$ .

**Esercizio D.** Si consideri una scommessa relativa al lancio di un dado in cui:

- se esce un numero inferiore a 3 il capitale scommesso si dimezza;
- se esce un numero maggiore od uguale a 3 il capitale scommesso raddoppia.

Si supponga inoltre di avere a disposizione due dadi con le seguenti distribuzioni di probabilità

Dado A						Dado B					
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/12	1/12	1/12	2/12	3/12	4/12

e si scelga di considerare uno o l'altro dei due dadi lanciando una moneta bilanciata: si lancia il dado A se esce testa, mentre si lancia il dado B se esce croce.

**a)** Ipotizzando che un giocatore partecipi alla scommessa con un capitale iniziale di 1 euro, disegnare il diagramma ad albero relativo alla scommessa.

**b)** Indicando con  $Y$  il capitale finale e con  $X$  il risultato del lancio della moneta ( $X = 0$  se esce 'croce';  $X = 1$  se esce 'testa') calcolare  $E(Y|X = 0)$  e  $E(Y|X = 1)$ .

**c)** Calcolare  $E(Y)$  e verificare che  $E(Y) = E(Y|X = 0) \cdot P(X = 0) + E(Y|X = 1) \cdot P(X = 1)$ .

**Esercizio E.** Relativamente all'Esercizio B dell'Esercitazione 11:

**a)** calcolare  $E(Y|X = 0)$ ,  $E(Y|X = 1)$  e  $\text{Var}(Y|X = 0)$ ,  $\text{Var}(Y|X = 1)$ ;

**b)** calcolare  $E(Y)$  e  $\text{Var}(Y)$ ;

**c)** verificare che  $E_X[E(Y|X)] = E(Y)$ .