Marco Minozzo e Annamaria Guolo
Laurea in Economia del Commercio Internazionale
Laurea in Economia e Amministrazione delle Imprese
Università degli Studi di Verona (sede di Vicenza)

Calcolo delle Probabilità

Soluzioni 11. Variabili aleatorie doppie discrete: distribuzioni congiunte, marginali e condizionate; indipendenza

La v.a. doppia discreta (X, Y) assume valori (coppie di valori, per X e per Y) in un insieme finito o infinito numerabile. La v.a. è nota nel momento in cui si conosce la probabilità f_{ij} con cui ogni coppia di valori (x_i, y_j) si realizza. L'insieme dei valori (x_i, y_j) e delle probabilità ad essi associati f_{ij} forma la *distribuzione di probabilità* di (X, Y). La distribuzione di probabilità deve soddisfare le due condizioni seguenti:

- $f_{ij} \geq 0, \forall i, \forall j$;
- $\sum_i \sum_j f_{ij} = 1$.

Dalla distribuzione di probabilità congiunta $\{f_{ij}\}$ si può ricavare la *distribuzione di probabilità marginale* per X, $\{f_{i.}\}$, o per Y, $\{f_{.j}\}$, come segue:

$$P(X = x_i) = f_{i.} = \sum_j f_{ij},\ \forall i$$

$$P(Y = y_j) = f_{.j} = \sum_i f_{ij},\ \forall j.$$

Infine, è possibile ricavare la *distribuzione di probabilità condizionata* per Y rispetto al valore x_i assunto da X (o viceversa) come segue:

$$P(Y = y_j | X = x_i) = f_{j|i} = \frac{f_{ij}}{f_{i.}},\ \forall j.$$

Nel caso in cui la distribuzione di probabilità di Y condizionata ai valori di X (o viceversa) sia sempre uguale, si parla di *indipendenza* tra Y e X.

Esercizio A. a) Affinchè $f(x,y)$ fornisca effettivamente una distribuzione di probabilità, deve valere:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} f(x_i,y_j)=1.$$

Per cui

$$k+3k+0,1+2k+0,2+0,2=1 \quad\Leftrightarrow\quad 6k=0,5 \quad\Leftrightarrow\quad k=1/12.$$

b) La funzione di ripartizione congiunta $F(x,y)$ è data da:

	$y<1$	$1\le y<4$	$4\le y<5$	$y\ge 5$
$x<2$	0	0	0	0
$2\le x<5$	0	1/12	11/60	23/60
$x\ge 5$	0	1/3	3/5	1

c) Le distribuzioni di probabilità marginali di X e di Y sono date da:

x	2	5
$f_X(x)$	$23/60$	$37/60$

y	1	4	5
$f_Y(y)$	$1/3$	$4/15$	$2/5$

d) Le distribuzioni di probabilità condizionate sono date da:

y	1	4	5
$\mathsf{P}(Y=y\|X=2)$	$5/23$	$6/23$	$12/23$

y	1	4	5
$\mathsf{P}(Y=y\|X=5)$	$15/37$	$10/37$	$12/37$

e) La probabilità che X ed Y siano entrambe uguali o superiori a 4 è data da:

$$\mathsf{P}(X\ge 4, Y\ge 4)=f(5,4)+f(5,5)=11/30.$$

f) La probabilità richiesta è data da:

$$\mathsf{P}(Y\le 4|X=2)=\mathsf{P}(Y=1|X=2)+\mathsf{P}(Y=4|X=2)=5/23+6/23=11/23.$$

g) Affinchè le variabili aleatorie X ed Y siano indipendenti deve valere $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$, per $x=2,5$ e $y=1,4,5$. Considerando $x=2$ e $y=1$, si può verificare che:

$$f(2,1)=1/12\neq(23/60)\cdot(1/3)=f_X(2)\cdot f_Y(1).$$

Pertanto le variabili aleatorie X e Y non sono indipendenti.

Esercizio B. Lo spazio campionario dell'esperimento è dato da:

$$\Omega=\{(T,T,T),(T,T,C),(T,C,T),(T,C,C),(C,T,T),(C,T,C),(C,C,T),(C,C,C)\}.$$

a) La distribuzione di probabilità marginale di X è data da:

$$f_X(0)=\mathsf{P}(\text{al primo lancio si presenta “testa”})=\mathsf{P}((T,T,T),(T,T,C),(T,C,T),(T,C,C))=1/2,$$
$$f_X(1)=\mathsf{P}(\text{al primo lancio si presenta “croce”})=\mathsf{P}((C,T,T),(C,T,C),(C,C,T),(C,C,C))=1/2.$$

Mentre la distribuzione di probabilità marginale di Y è data da:

$$f_Y(0)=\mathsf{P}((C,C,C))=1/8,\qquad f_Y(1)=\mathsf{P}((T,C,C),(C,T,C),(C,C,T))=3/8,$$
$$f_Y(2)=\mathsf{P}((T,T,C),(T,C,T),(C,T,T))=3/8,\qquad f_Y(3)=\mathsf{P}((T,T,T))=1/8.$$

b) La distribuzione di probabilità congiunta di X ed Y si ricava come:

$$f(0,0)=0,\quad f(0,1)=\mathsf{P}((T,C,C))=1/8,\quad f(0,2)=\mathsf{P}((T,T,C),(T,C,T))=2/8,$$
$$f(0,3)=\mathsf{P}((T,T,T))=1/8,\quad f(1,0)=\mathsf{P}((C,C,C))=1/8,$$
$$f(1,1)=\mathsf{P}((C,T,C),(C,C,T))=2/8,\quad f(1,2)=\mathsf{P}((C,T,T))=1/8,\quad f(1,3)=0,$$

per cui si ottiene

x \ y	0	1	2	3
0	0	1/8	1/4	1/8
1	1/8	1/4	1/8	0

c) Le distribuzioni di probabilità condizionate richieste sono date da:

y	0	1	2	3
$\mathsf{P}(Y=y \mid X=0)$	0	$1/4$	$1/2$	$1/4$

y	0	1	2	3
$\mathsf{P}(Y=y \mid X=1)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	0

d) Affinchè le variabili aleatorie X ed Y siano indipendenti deve aversi $\mathsf{P}(Y = y|X = x) = \mathsf{P}(Y = y) = f_Y(y)$, per $x = 0, 1$ e $y = 0, 1, 2, 3$. Come risulta evidente confrontando, ad esempio, la distribuzione condizionata di Y dato $X = 0$, con la distribuzione marginale di Y, le variabili aleatorie X e Y non sono indipendenti.

Esercizio C. a) Le distribuzioni marginali di X e di Y rispetto alla distribuzione congiunta A sono:

x	1	2	3
$f_X(x)$	$1/6$	$2/6$	$3/6$

y	1	2	3
$f_Y(y)$	$1/6$	$2/6$	$3/6$

Osservando che $f(1, 2) = 0 \neq (1/6) \cdot (2/6) = f_X(1) \cdot f_Y(2)$, si può concludere che le variabili aleatorie X e Y non sono indipendenti.
b) Le distribuzioni marginali di X e di Y rispetto alla distribuzione congiunta B sono:

x	1	2	3
$f_X(x)$	$1/6$	$2/6$	$3/6$

y	1	2	3
$f_Y(y)$	$1/6$	$2/6$	$3/6$

Dato che $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, per ogni $x = 1, 2, 3$ e $y = 1, 2, 3$, allora le variabili aleatorie X ed Y sono indipendenti.
c) Le distribuzioni condizionate della Y sono date da:

y	1	2	3
$\mathsf{P}(Y=y \mid X=1)$	$1/6$	$2/6$	$3/6$

y	1	2	3
$\mathsf{P}(Y=y \mid X=2)$	$1/6$	$2/6$	$3/6$

y	1	2	3
$\mathsf{P}(Y=y \mid X=3)$	$1/6$	$2/6$	$3/6$

Si può osservare che le distribuzioni condizionate di Y, dato $X = x$, per $x = 1, 2, 3$, sono uguali alla distribuzione marginale di Y; infatti le variabili aleatorie X ed Y sono indipendenti.
d) Le distribuzioni condizionate di X sono date da:

x	1	2	3
$\mathsf{P}(X=x \mid Y=1)$	$1/6$	$2/6$	$3/6$

x	1	2	3
$\mathsf{P}(X=x \mid Y=2)$	$1/6$	$2/6$	$3/6$

x	1	2	3
$\mathsf{P}(X=x \mid Y=3)$	$1/6$	$2/6$	$3/6$

Le distribuzioni condizionate di X dato $Y = y$, per $y = 1, 2, 3$, sono uguali alla distribuzione marginale di X, essendo X ed Y variabili aleatorie indipendenti.

Esercizio D. Indicando con X il numero di uova deposte, si ha $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Inoltre, indicando con Y il numero di nuovi insetti, allora la distribuzione condizionata di Y, dato $X = x$, è data da

$$Y|X = x \quad \sim \quad \text{Bin}(x, p).$$

(Si osservi che se il numero di uova deposte è x, allora il numero di nuovi insetti può essere $0, 1, \ldots, x$). Allora la probabilità che si possano sviluppare y nuovi insetti, per $y = 0, 1, 2, \ldots$, è data da:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(Y = y) &= \mathsf{P}(Y = y | X = y) \cdot \mathsf{P}(X = y) + \mathsf{P}(Y = y | X = y + 1) \cdot \mathsf{P}(X = y + 1) \\
&\quad + \mathsf{P}(Y = y | X = y + 2) \cdot \mathsf{P}(X = y + 2) + \cdots \\
&= \sum_{x=y}^{\infty} \binom{x}{y} p^y (1-p)^{x-y} \cdot \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\
&= \frac{p^y e^{-\lambda}}{y!} \sum_{x=y}^{\infty} \frac{1}{(x-y)!} (1-p)^{x-y} \lambda^{x-y+y} \\
&= \frac{p^y e^{-\lambda}}{y!} \lambda^y \sum_{x=y}^{\infty} \frac{1}{(x-y)!} (1-p)^{x-y} \lambda^{x-y} \\
&= \frac{p^y e^{-\lambda}}{y!} \lambda^y \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^k}{k!} = \frac{(p\lambda)^y e^{-\lambda}}{y!} \cdot e^{(1-p)\lambda} \\
&= \frac{(p\lambda)^y e^{-\lambda p}}{y!}.
\end{aligned}$$

Pertanto $Y \sim$ Poisson(λp).