Marco Minozzo e Annamaria Guolo

Laurea in Economia del Commercio Internazionale
Laurea in Economia e Amministrazione delle Imprese
Università degli Studi di Verona (sede di Vicenza)

Calcolo delle Probabilità

Soluzioni 8. Valore atteso, varianza e disuguaglianza di Tchebycheff

Disuguaglianza di Markov. Sia X una v.a. con valore atteso $E(X) = \mu$ e sia $g(\cdot)$ una funzione non negativa. Allora, per $r > 0$, si ha che

$$P\left(g(X) \geq r\right) \leq \frac{E(g(X))}{r}$$

Disuguaglianza di Tchebycheff. Sia X una v.a. con valore atteso $E(X) = \mu$ e varianza $Var(X) = \sigma^2 < +\infty$. Allora, per $\varepsilon > 0$, si ha che

$$P\left(|X - \mu| < \varepsilon\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Esercizio A. a) Lo spazio campionario è dato da:

$$\Omega = \{(T), (C, T), (C, C, T), (C, C, C, T), (C, C, C, C, T), (C, C, C, C, C)\}.$$

b) La distribuzione di probabilità della variabile aleatoria N che conta il numero di lanci effettuati è data da:
$\mathsf{P}(N = 1) = \mathsf{P}(T) = 1/2$;
$\mathsf{P}(N = 2) = \mathsf{P}(C, T) = 1/4$;
$\mathsf{P}(N = 3) = \mathsf{P}(C, C, T) = 1/8$;
$\mathsf{P}(N = 4) = \mathsf{P}(C, C, C, T) = 1/16$;
$\mathsf{P}(N = 5) = \mathsf{P}(C, C, C, C, T) + \mathsf{P}(C, C, C, C, C) = (1/32) + (1/32) = 1/16.$
c) Il numero atteso di lanci della moneta è dato da:

$$\mathrm{E}(N) = 1 \cdot (1/2) + 2 \cdot (1/4) + 3 \cdot (1/8) + 4 \cdot (1/16) + 5 \cdot (1/16) = 1,94.$$

Esercizio B. b) Indicando con V l'evento che il giocatore vince una data partita e con $\overline{V}$ l'evento che il giocatore non vince la partita, lo spazio campionario è dato da:

$$\begin{array}{rllll} \Omega = & \{(\overline{V}), & (V, V, V), & (V, \overline{V}, \overline{V}), & \\ & (V, V, \overline{V}, V, V), & (V, V, \overline{V}, V, \overline{V}), & (V, V, \overline{V}, \overline{V}, V), & (V, V, \overline{V}, \overline{V}, \overline{V}), \\ & (V, \overline{V}, V, V, V), & (V, \overline{V}, V, V, \overline{V}), & (V, \overline{V}, V, \overline{V}, V), & (V, \overline{V}, V, \overline{V}, \overline{V})\}. \end{array}$$

Agli eventi elementari sono associate le probabilità:

$$\begin{array}{lll} \mathsf{P}(\overline{V}) = 3/4, & \mathsf{P}(V, V, V) = 1/64, & \mathsf{P}(V, \overline{V}, \overline{V}) = 9/64, \\ \mathsf{P}(V, V, \overline{V}, V, V) = 3/1024, & \mathsf{P}(V, V, \overline{V}, V, \overline{V}) = 9/1024, & \mathsf{P}(V, V, \overline{V}, \overline{V}, V) = 9/1024, \\ \mathsf{P}(V, V, \overline{V}, \overline{V}, \overline{V}) = 27/1024, & \mathsf{P}(V, \overline{V}, V, V, V) = 3/1024, & \mathsf{P}(V, \overline{V}, V, V, \overline{V}) = 9/1024, \\ \mathsf{P}(V, \overline{V}, V, \overline{V}, V) = 9/1024, & \mathsf{P}(V, \overline{V}, V, \overline{V}, \overline{V}) = 27/1024. & \end{array}$$

c) La probabilità che il giocatore smetta di giocare prima della quinta partita è data da

$$\mathsf{P}(\overline{V}) + \mathsf{P}(V, V, V) + \mathsf{P}(V, \overline{V}, \overline{V}) = (3/4) + (1/64) + (9/64) = 58/64.$$

d)La probabilità richiesta è data da:

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(\text{non perdere}|5 \text{ partite}) &= 1 - \mathsf{P}(\text{perdere}|5 \text{ partite}) \\ &= 1 - \frac{\mathsf{P}(V, V, \overline{V}, \overline{V}, \overline{V}) + \mathsf{P}(V, \overline{V}, V, \overline{V}, \overline{V})}{\mathsf{P}(5 \text{ partite})} \\ &= 1 - \frac{52/1024}{6/64} = 1 - (9/16) = 7/16. \end{aligned}$$

e) La variabile aleatoria Y ha distribuzione di probabilità:

y	1	3	5
$\mathsf{P}(Y = y)$	48/64	10/64	6/64

Il valore atteso e la varianza di Y sono quindi dati da:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= 1 \cdot (3/4) + 3 \cdot (10/64) + 5 \cdot (6/64) = 1,69, \\ \mathrm{Var}(Y) &= 1^2 \cdot (3/4) + 3^2 \cdot (10/64) + 5^2 \cdot (6/64) - (1,69)^2 = 1,64. \end{aligned}$$

f) La variabile aleatoria X ha distribuzione di probabilità:

x	0	2	4
$\mathsf{P}(X = x)$	966/1024	36/1024	22/1024

Pertanto valore atteso e varianza di X sono dati da:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= 0 \cdot (966/1024) + 2 \cdot (36/1024) + 4 \cdot (22/1024) = 0,16, \\ \mathrm{Var}(X) &= 0^2 \cdot (966/1024) + 2^2 \cdot (36/1024) + 4^2 \cdot (22/1024) - (0,16)^2 = 0,46.\end{aligned}$$

g) Indicando con Z l'ammontare in yen in possesso del giocatore alla fine della serata, si ha $Z = 99 \cdot X$ e quindi

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z) &= \mathrm{E}(99 \cdot X) = 99 \cdot \mathrm{E}(X) = 99 \cdot 0,16 = 15,84, \\ \mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{Var}(99 \cdot X) = 99^2 \cdot \mathrm{Var}(X) = 99^2 \cdot 0,46 = 4508,46.\end{aligned}$$

Esercizio C. Se $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, allora $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$. Per n fissato, basta trovare il valore di p che rende nulla la derivata prima rispetto a p di $\mathrm{Var}(X)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathrm{Var}(X) = 0 \Leftrightarrow n - 2np = 0 \Leftrightarrow p = 1/2,$$

perciò la varianza è massima per $p = 1/2$.

Esercizio D. Il valore atteso della variabile aleatoria X si ricava mediante integrazione per parti

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \int_0^\infty x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty x \cdot 2e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \Big[x(-e^{-2x})\Big]_0^\infty - \int_0^\infty 1 \cdot (-e^{-2x})\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[-xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}\Big]_0^\infty = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1/2}{-e^{2x}}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

mentre per la varianza si ricava

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^\infty x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty x^2 \cdot 2e^{-2x}\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[x^2(-e^{-2x})\Big]_0^\infty - \int_0^\infty 2x(-e^{-2x})\,\mathrm{d}x = \Big[-x^2e^{-2x}\Big]_0^\infty + \frac{1}{2} \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x^2}{e^{2x}}\right) - 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

e quindi

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Esercizio E. Per la variabile aleatoria X si ha:

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^\infty x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\; 2x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3},$$

e

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \int_{-\infty}^\infty x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 2x\,\mathrm{d}x - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \int_0^1 2x^3\,\mathrm{d}x - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.\end{aligned}$$

Mentre, per la variabile aleatoria Y, integrando per parti, si ricava:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{\alpha} y e^{-y}\,\mathrm{d}y \\
&= \lim_{\alpha\to\infty}\Big[y\cdot(-e^{-y})\Big]_0^{\alpha} - \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{\alpha} 1\cdot(-e^{-y})\,\mathrm{d}y = \lim_{\alpha\to\infty}\Big[-ye^{-y}-e^{-y}\Big]_0^{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha\to\infty}\Big[-e^{-y}\cdot(y+1)\Big]_0^{\alpha} = \lim_{\alpha\to\infty}\left(1-\frac{\alpha+1}{e^{\alpha}}\right) = 1,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\infty} y^2 e^{-y}\,\mathrm{d}y \\
&= \Big[y^2\cdot(-e^{-y})\Big]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2y\cdot(-e^{-y})\,\mathrm{d}y = \Big[-y^2e^{-y}\Big]_0^{\infty} + 2 \\
&= \lim_{y\to\infty}\left(-\frac{y^2}{e^y}\right) - 0 + 2 = 2.
\end{aligned}$$

La varianza sarà quindi data da:

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - (\mathrm{E}(Y))^2 = 2 - (1)^2 = 1.$$

Esercizio F. a) Essendo le entrate complessive giornaliere in lire date da $G = 1500 \cdot X$, il valore atteso e la varianza sono dati da:
$\mathrm{E}(G) = 1500 \cdot \mathrm{E}(X) = 60'000$, $\mathrm{Var}(G) = 1500^2 \cdot \mathrm{Var}(X) = 225'000'000$, $\sqrt{\mathrm{Var}(G)} = 15'000$.
Mentre in euro si ha $G = (1500/1936,27) \cdot X$, pertanto
$\mathrm{E}(G) = \dfrac{1500}{1936,27} \cdot \mathrm{E}(X) = 30,99$, $\mathrm{Var}(G) = \left(\dfrac{1500}{1936,27}\right)^2 \cdot \mathrm{Var}(X) = 60,01$, $\sqrt{\mathrm{Var}(G)} = 7,75$.
b) Applicando la disuguaglianza di Markov con $g(x) = x$ e con $r = 51$, si ottiene:

$$\mathsf{P}(X > 50) = \mathsf{P}(X \geq 51) \leq \frac{\mathrm{E}(X)}{51} = \frac{40}{51} = 0,7843.$$

c) Applicando la disuguaglianza di Tchebycheff (con $k = 2$) si ottiene:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(21 \leq X \leq 59) &= \mathsf{P}(20 < X < 60) = \mathsf{P}(|X-40| < 20) = 1 - \mathsf{P}(|X-40| \geq 20) \\
&= 1 - \mathsf{P}(|X-\mu| \geq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} = 3/4.
\end{aligned}$$

Esercizio G. Essendo $\mathrm{E}(X) = 3$ e $\mathrm{E}(X^2) = 13$, si ricava immediatamente $\mathrm{Var}(X) = 4$ e $\sigma = 2$. Perciò, un estremo inferiore per $\mathsf{P}(-2 < X < 8)$ si può ottenere utilizzando la disuguaglianza di Tchebycheff:

$$\mathsf{P}(-2 < X < 8) = \mathsf{P}(-5 < X - 3 < 5) = \mathsf{P}(|X-3| < 2,5\cdot 2) \geq 1 - \frac{1}{(2,5)^2} = 0,84.$$