Marco Minozzo e Annamaria Guolo
Laurea in Economia del Commercio Internazionale
Laurea in Economia e Amministrazione delle Imprese
Università degli Studi di Verona (sede di Vicenza)

---

# Statistica Descrittiva
# Soluzioni 5. Numeri indici

## Introduzione

I numeri indici costituiscono la classe più diffusa di rapporti statistici. Si costruiscono al fine di valutare variazioni relative di uno o più fenomeni nello spazio o nel tempo. Senza perdita di generalità, nel seguito facciamo riferimento alla costruzione di numeri indici relativi ad una serie di osservazioni di un fenomeno rilevate in istanti temporali successivi

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_t, \ldots$$

I **numeri indici a base fissa** descrivono le variazioni del fenomeno rispetto ad una **base** fissata, vale a dire rispetto ad un valore costante. Sia $x_0$ la base scelta. I numeri indici corrispondenti sono dati da

$${}_0I_1 = \frac{x_1}{x_0}, \ldots, \ {}_0I_t = \frac{x_t}{x_0}, \ldots$$

Il cambiamento della base da $x_0$ ad un valore $x_n$ avviene facilmente considerando il **coefficiente di raccordo** $x_0/x_n$

$${}_nI_1 = {}_0I_1 \frac{x_0}{x_n}, \ldots, \ {}_nI_t = {}_0I_t \frac{x_0}{x_n}, \ldots$$

I **numeri indici a base mobile**, invece, descrivono le variazioni di un fenomeno rispetto alla valutazione dello stesso avvenuta all'istante precedente. Vale a dire che la base per il calcolo del numero indice è il valore precedente a quello di riferimento

$${}_0I'_1 = \frac{x_1}{x_0}, \ldots, \ {}_{t-1}I'_t = \frac{x_t}{x_{t-1}}, \ldots$$

È possibile passare dagli indici a base fissa agli indici a base mobile considerando la relazione

$$\frac{{}_0I_t}{{}_0I_{t-1}} = {}_{t-1}I'_t$$

Data una serie di numeri indici a base mobile, una loro opportuna sintesi è data dalla media geometrica.

Possono essere costruiti indici più complessi di quelli appena visti, i quali derivano da opportune aggregazioni di valori. Siano date le serie dei prezzi e delle quantità di $m$ prodotti riferiti ad un periodo di $0, 1, \ldots, t$ tempi successivi

$$\text{prezzi}: p_{i,0}, \ldots, p_{i,t}, \quad \text{per } i = 1, \ldots, m$$

$$\text{quantità}: q_{i,0}, \ldots, q_{i,t}, \quad \text{per } i = 1, \ldots, m$$

Si costruiscono due indici aggregati dei prezzi. **L'indice dei prezzi di Laspeyres** è un indice a base fissa e con pesi fissi, in quanto non cambia nel tempo l'insieme delle quantità di riferimento. Esso si ottiene come segue:

$$_0I_{Lt} = \frac{\sum_{i=1}^m p_{i,t}q_{i,0}}{\sum_{i=1}^m p_{i,0}q_{i,0}}.$$

**L'indice dei prezzi di Paasche** è anch'esso a base fissa, ma con pesi variabili, in quanto l'insieme delle quantità di riferimento è mutabile

$$_0I_{Pt} = \frac{\sum_{i=1}^m p_{i,t}q_{i,t}}{\sum_{i=1}^m p_{i,0}q_{i,t}}.$$

**Esercizio A.**
a) Indicando con $_{93}I_t$ i numeri indici (a base fissa) con base il 1993, i numeri indici richiesti sono i seguenti:

| $t$ | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 | 1997 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_t$ | 957650 | 1010470 | 1085224 | 1144790 | 1201016 |
| $_{93}I_t$ | 1,0000 | $\frac{1010470}{957650} = 1,0552$ | $\frac{1085224}{957650} = 1,1332$ | $\frac{1144790}{957650} = 1,1954$ | $\frac{1201016}{957650} = 1,2541$ |
| $I'_t$ | – | $\frac{1010470}{957650} = 1,0552$ | $\frac{1085224}{1010470} = 1,0740$ | $\frac{1144790}{1085224} = 1,0549$ | $\frac{1201016}{1144790} = 1,0491$ |

b) Indicando con $_{95}I_t$ i numeri indici (a base fissa) con base il 1995, per effettuare il cambiamento di base occorre considerare il coefficiente di raccordo $x_{93}/x_{95}$, di modo che

$$_{95}I_t =_{93} I_t \cdot (x_{93}/x_{95}) =_{93} I_t/_{93}I_{95},$$

dalla quale si ottiene $_{95}I_{93} = 0,8824$, $_{95}I_{94} = 0,9311$, $_{95}I_{95} = 1,0000$, $_{95}I_{96} = 1,0549$, $_{95}I_{97} = 1,1067$.
c) La variazione media relativa nel periodo 1993-1997 si ottiene tramite il calcolo della media geometrica ed è pari a $\sqrt[4]{I'_{94}I'_{95}I'_{96}I'_{97}} - 1 = 0,0583$.

**Esercizio B.**
a) Consideriamo i valori calcolati nella tabella seguente:

| Categorie di Consumo | Spesa 97 | Spesa 98 | $_{97}I_{98}$ | $p_{98}q_{97}$ | $p_{97}q_{98}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Abbigliamento e Calzature | 262927 | 269808 | 1,0272 | 270078,6 | 262663,6 |
| Istruzione | 59247 | 52854 | 1,0179 | 60307,52 | 51924,55 |
| Mobili, elett. e servizi per la casa | 277526 | 275758 | 1,0179 | 282493,7 | 270908,70 |
| Totale | 599700 | 598420 | | 612879,80 | 585496,8 |

Inizialmente calcoliamo gli indici $_{97}I_{98} =$ per le tre categorie di consumo, come segue

$$_{97}I_{98} = \frac{_{95}I_{98}}{_{95}I_{97}}.$$

In seguito si calcolano le spese ipotetiche $p_{98}q_{97}$ (la spesa che si sarebbe sostenuta per l'acquisto delle quantità $q_{97}$ a prezzi $p_{98}$) e $p_{97}q_{98}$ (la spesa che si sarebbe sostenuta per l'acquisto delle quantità $q_{98}$ a prezzi $p_{97}$) necessarie alla valutazione degli indici di Laspeyres e di Paasche. Si consideri che

$$p_{98}q_{97} =_{97} I_{98}p_{97}q_{97} =_{97} I_{98}\text{Spesa}_{97}$$

e che, analogamente,

$$p_{97}q_{98} = ({}_{97}I_{98})^{-1}p_{98}q_{98} = ({}_{97}I_{98})^{-1}\text{Spesa}_{98}$$

Infine, si ricavano gli indici richiesti considerando i totali di spese reali e ipotetiche, di modo che l'indice di Laspayres risulta pari a $612879,8/599700 = 1,02198$, mentre l'indice di Paasche risulta pari a $598420/585496,8 = 1,02207$.

**Esercizio C.**
a) Indicando con $x_{93}$, $x_{94}$, $x_{95}$, $x_{96}$ le intensità della serie, la serie degli indici a base mobile è data da

$$I'_{94} = x_{94}/x_{93} = 0,2916,\ I'_{95} = x_{95}/x_{94} = 2,8284,\ I'_{96} = x_{96}/x_{95} = 0,8942,$$

mentre la serie delle variazioni relative è data da

$$(x_{94} - x_{93})/x_{93} = -0,7084,\ (x_{95} - x_{94})/x_{94} = 1,8284,\ (x_{96} - x_{95})/x_{95} = -0,1058.$$

Le serie storiche ottenute si possono rappresentare in un grafico cartesiano ponendo in ascissa gli anni ed in ordinata le serie ottenute e congiungendo con dei segmenti di retta i punti ottenuti.

**Esercizio D.**
a) La serie degli indici a base mobile è data da

$$I'_{94} = 1,031/0,988 = 1,0435,\ I'_{95} = 1,161/1,031 = 1,1261,$$

$$I'_{96} = 1,203/1,161 = 1,0362,\ I'_{97} = 1,201/1,203 = 0,9983.$$

b) Una media opportuna è data dalla media geometrica

$$\gamma = \sqrt[4]{1,0435 \cdot 1,1261 \cdot 1,0362 \cdot 0,9983} = 1,0500.$$

Infatti, assumendo che nel periodo considerato il rapporto tra il prezzo dei prodotti vegetali di due annate successive sia costante e pari a 1,05, per un dato livello dei prezzi nel 1993, si ottiene per il 1997 lo stesso livello dei prezzi che si ottiene con la serie originaria.

**Esercizio E.**
a) Per ogni categoria di consumo, gli indici dei prezzi del 1995 rispetto al 1994 si possono determinare considerando il rapporto ${}_{94}I_{95} = {}_{90}I_{95}/{}_{90}I_{94}$. Per le quattro categorie si ottiene $1,0477$, $1,0187$, $1,0556$ e $1,0756$ rispettivamente. Perciò usando la spesa nelle quattro categorie per le due annate, si ottengono gli indici di Laspayres e di Paasche:

$${}_{94}I_{L95} = \frac{\sum_{i=1}^{4} ({}_{94}I_{95})_i\ (p_{94})_i(q_{94})_i}{\sum_{i=1}^{4} (p_{94})_i(q_{94})_i} = \frac{\sum_{i=1}^{4} ({}_{94}I_{95})_i\ (\text{Spesa94})_i}{\sum_{i=1}^{4} (\text{Spesa94})_i} = \frac{488038,06}{463226} = 1,0536,$$

$${}_{94}I_{P95} = \frac{\sum_{i=1}^{4} (p_{95})_i(q_{95})_i}{\sum_{i=1}^{4} ({}_{94}I_{95})_i^{-1}\ (p_{95})_i(q_{95})_i} = \frac{\sum_{i=1}^{4} (\text{Spesa95})_i}{\sum_{i=1}^{4} ({}_{94}I_{95})_i^{-1}(\text{Spesa95})_i} = \frac{501832}{476242,36} = 1,0537.$$