ISTITUZIONI DI STATISTICA – A. A. 2007/2008
Marco Minozzo e Annamaria Guolo
Laurea in Economia del Commercio Internazionale
Laurea in Economia e Amministrazione delle Imprese
Università degli Studi di Verona (sede di Vicenza)

Calcolo delle Probabilità

Soluzioni 6. Variabili aleatorie continue: funzione di densità e funzione di ripartizione

Variabile aleatoria continua.
Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, una *variabile aleatoria* (v.a.) è una funzione $X(\omega)$ avente come dominio Ω e codominio la retta reale che soddisfa alla condizione di *misurabilità*, cioè tale che, per ogni $r \in \mathbf{R}$, l'insieme $\{\omega : X(\omega) \leq r\}$ appartiene ad $\mathcal{A}$.
Nel caso in cui l'insieme dei valori che la variabile può assumere sia un insieme infinito non numerabile, si parla di v.a. continua. In tal caso, le probabilità calcolabili con riferimento a X sono legate alla definizione di intervalli di valori x e non a singoli punti, i quali hanno probabilità nulla.

Funzione di ripartizione e funzione di densità.
Come nel caso delle v.a. discrete definiamo la *funzione di ripartizione* di X nel punto x come $F_X(x) = P(X \leq x)$, la quale assume valori nell'intervallo $[0, 1]$. Le funzione di ripartizione gode delle seguenti proprietà:

- è una funzione continua e monotona non decrescente;
- $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$;
- $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$;
- $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Sia data una funzione non negativa $f_X(x)$, integrabile sull'insieme dei valori assumibili da X e tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$. Allora $f_X(x)$ è la *funzione di densità* di X ed è tale che

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

Valore atteso e varianza.
Una v.a. X continua con funzione di densità $f_X(x)$ ha valore atteso

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$$

e varianza

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x)dx.$$

Esercizio A. a) Le probabilità richieste sono date da:
$\mathsf{P}(X < 1,5) = F(1,5) = 1 - e^{-3} = 0,9502$;
$\mathsf{P}(X \geq 0,5) = 1 - F(0,5) = e^{-1} = 0,3679$;
$\mathsf{P}(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = e^{-2} - e^{-4} = 0,1170$.

b) La funzione di densità della variabile aleatoria X è data da

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) = 2e^{-2x}, & x > 0. \end{cases}$$

Esercizio B. a) Le funzioni $f_X(x)$ ed $f_Y(y)$ sono in effetti funzioni di densità in quanto sono funzioni non negative, cioè, $f_X(x) \geq 0$, $\forall x \in \Re$ ed $f_Y(y) \geq 0$, $\forall y \in \Re$, ed il loro integrale da $-\infty$ a ∞ è pari a 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2x\,\mathrm{d}x = \left[x^2\right]_0^1 = 1;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \lim_{\alpha\to\infty}\left[\int_0^{\alpha} e^{-y}\,\mathrm{d}y\right] = \lim_{\alpha\to\infty}\left[-e^{-y}\right]_0^{\alpha} = \lim_{\alpha\to\infty}\left(1 - \frac{1}{e^{\alpha}}\right) = 1.$$

b) Le funzioni di ripartizione delle variabili aleatorie X ed Y sono date da:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

e

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1 - e^{-y}, & y \geq 0. \end{cases}$$

c) Le probabilità richieste sono date da:
(i) $\mathsf{P}(X > 0,75) = 1 - F_X(0,75) = 1 - (0,75)^2 = 0,4375$;
(ii) $\mathsf{P}(0,2 \leq X < 0,5) = F_X(0,5) - F_X(0,2) = (0,5)^2 - (0,2)^2 = 0,21$;
(iii) $\mathsf{P}(Y \geq 1,5) = 1 - F_Y(1,5) = 1 - (1 - e^{-1,5}) = e^{-1,5} = 0,2231$;
(iv) $\mathsf{P}(-3 < Y \leq 2) = F_Y(2) - F_Y(-3) = 1 - e^{-2} = 0,8647$.