ISTITUZIONI DI STATISTICA – A. A. 2007/2008
Marco Minozzo e Annamaria Guolo
Laurea in Economia del Commercio Internazionale
Laurea in Economia e Amministrazione delle Imprese
Università degli Studi di Verona (sede di Vicenza)

Calcolo delle Probabilità
Soluzioni 9. Distribuzione di Poisson e distribuzione geometrica

Distribuzione di Poisson. La v.a. di Poisson è una v.a. discreta utile a descrivere il numero di volte in cui si presenta un evento, quale ad esempio il numero di arrivi in un aeroporto, il numero di chiamate ad un centralino e così via. La variabile assume valori in un insieme infinito numerabile. Sia X la v.a. di Poisson di parametro λ. Allora $x = 0, 1, 2, \dots$ e tali valori sono assunti con probabilità

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\ x = 0, 1, \dots$$

- Il valore atteso di X e la sua varianza coincidono e sono pari a $E(X) = Var(X) = \lambda$.
- La somma di m v.a. di Poisson indipendenti con parametri rispettivamente $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ è ancora una v.a. di Poisson con parametro $(\lambda_1 + \dots + \lambda_m)$.
- Sia $X \sim Bin(n, p)$. Se $n \to \infty$ e $p \to 0$ (vale a dire che raramente si verifica un successo), allora la v.a. Binomiale tende alla distribuzione della v.a. di Poisson con parametro $\lambda = np$.

Distribuzione geometrica. La v.a. geometrica è una v.a. discreta che descrive il numero di prove necessarie affinchè l'evento di interesse si verifichi per la prima volta. Sia p la probabilità del verificarsi dell'evento. Sia $X \sim Geo(p)$. Allora

$$P(X = x) = (1 - p)^{x-1}p,\ x = 0, 1, 2, \dots$$

- Il valore atteso di X è pari a $E(X) = 1/p$.
- La varianza di X è pari a $Var(X) = (1 - p)/p^2$.
- La v.a. geometrica gode della proprietà di *assenza di memoria*. Vale a dire che

$$P(X = x + a|X > a) = P(X = x).$$

Esercizio A. a) La probabilità che nel periodo considerato ci siano più di due chiamate è data da

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(\text{più di 2 chiamate}) &= 1-\mathsf{P}(\text{fino a 2 chiamate}) = 1-[\mathsf{P}(X=0)+\mathsf{P}(X=1)+\mathsf{P}(X=2)]\\ &= 1-\left[\frac{15^0\cdot e^{-15}}{0!}+\frac{15^1\cdot e^{-15}}{1!}+\frac{15^2\cdot e^{-15}}{2!}\right]=0,9996.\end{aligned}$$

b) La probabilità che nel periodo considerato ci siano esattamente 20 chiamate è data da

$$\mathsf{P}(X=20)=\frac{15^{20}\cdot e^{-15}}{20!}=0,042.$$

Esercizio B. a) Si indichi con X la variabile aleatoria che conta il numero di errori di stampa presenti nella prima pagina. Allora $X\sim \text{Bin}(300,\ 1/500)$. Pertanto

$$\mathsf{P}(X=2)=\binom{300}{2}\left(\frac{1}{500}\right)^2\left(1-\frac{1}{500}\right)^{298}=0,0988,$$

e

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X\geq 2) &= 1-\mathsf{P}(X<2)=1-\mathsf{P}(X=0)-\mathsf{P}(X=1)\\ &= 1-\binom{300}{0}\left(\frac{1}{500}\right)^0\left(1-\frac{1}{500}\right)^{300}-\binom{300}{1}\left(\frac{1}{500}\right)^1\left(1-\frac{1}{500}\right)^{299}=0,1218.\end{aligned}$$

b) Posto $\lambda=n\cdot p=300/500=3/5$, allora X può essere assunta approssimativamente distribuita come una variabile di Poisson di media pari a $\lambda=3/5$. Pertanto

$$\mathsf{P}(X=2)\simeq\frac{(3/5)^2\cdot e^{-(3/5)}}{2!}=0,0988,$$

e

$$\mathsf{P}(X\geq 2)=1-\mathsf{P}(X=0)-\mathsf{P}(X=1)\simeq 1-\frac{(3/5)^0\cdot e^{-(3/5)}}{0!}-\frac{(3/5)^1\cdot e^{-(3/5)}}{1!}=0,1219.$$

Esercizio C. a) Indicando con N il numero di giorni in cui l'investitore tiene l'azione, allora N è una variabile aleatoria con distribuzione geometrica di parametro $p=1/2$. Pertanto il numero atteso di giorni in cui l'investitore tiene l'azione è pari a

$$\mathsf{E}(N)=\frac{1}{p}=\frac{1}{1/2}=2,$$

mentre la probabilità che l'investitore rivenda l'azione alla fine del quinto giorno è pari a

$$\mathsf{P}(N=5)=p\cdot(1-p)^4=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{2^5}=0,031.$$

b) Applicando la proprietà di "assenza di memoria" della distribuzione geometrica, si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(N=15|N>10) &= \mathsf{P}(N>14|N>10)-\mathsf{P}(N>15|N>10)\\ &= \mathsf{P}(N>4)-\mathsf{P}(N>5)=\mathsf{P}(N=5)=0,031.\end{aligned}$$

c) Costruendo il diagramma ad albero relativo all'investimento, si può notare che l'investitore subisce una perdita solo se il prezzo dell'azione scende il primo o il secondo giorno. Pertanto

$$\mathsf{P}(\text{l'investitore subisce una perdita})=\mathsf{P}(N=1)+\mathsf{P}(N=2)=p+p(1-p)=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}.$$

Esercizio D. Si consideri l'evento che esce il numero 6 come l'evento "successo". Allora la variabile aleatoria N che rappresenta il numero delle prove necessarie affinchè esca per la prima volta il numero 6 ha una distribuzione di probabilità geometrica con parametro $p = 1/6$.
a) La probabilità che vinca il primo che inizia a lanciare è data da:

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(N=1) + \mathsf{P}(N=3) + \dots &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}(N = 2n+1) = \sum_{n=0}^{\infty} p \cdot (1-p)^{2n} \\ &= \frac{p}{1-(1-p)^2} = \frac{1/6}{1-(1-1/6)^2} = 0,545. \end{aligned}$$

b) La probabilità che vinca il secondo che inizia a lanciare è pari a:

$$1 - \mathsf{P}(\text{vince il primo a lanciare}) = 1 - 0,545 = 0,455.$$