

Modelli Stocastici per la Finanza



A.A. 2019/2020 (primo semestre)

CREDITI (CFU): 9

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN BANCA E FINANZA (curriculum Finanza Quantitativa)

DOCENTE: Marco Minozzo

ORARIO DI RICEVIMENTO: martedì 12.00 – 13.00

TELEFONO: 045-8028234

CELLULARE: 347-2481561

E-MAIL: marco.minozzo@univr.it

ALTRO DOCENTE: Catia Scricciolo



Piattaforma E-learning di Ateneo. Il materiale didattico relativo al corso (programma, esercizi, temi d'esame con soluzione, appunti ecc.) si trova sulla piattaforma E-learning di Ateneo. In caso di problemi di accesso al servizio di E-learning, si prega di contattare i responsabili dell'area informatica.

Calendario delle lezioni. Il corso è articolato su 13 settimane del primo semestre. Le lezioni si terranno dall'1 ottobre 2019 all'8 gennaio 2020 per un totale di 54 ore secondo il seguente calendario:

martedì	ore 14:00 – 16:30	Aula SPC
mercoledì	ore 14:00 – 16:30	Aula SPC

Le lezioni sono sospese durante le festività.

Ricevimento studenti. Nel caso di sovrapposizioni (con altre lezioni ecc.) delle ore previste per il ricevimento studenti, si prega di contattare direttamente il docente.

Modalità di svolgimento delle lezioni. La maggior parte del corso si svolgerà attraverso una serie di lezioni frontali alle quali gli studenti sono fortemente invitati a partecipare prendendo regolarmente gli appunti.

Esercitazioni. Fanno parte integrante del corso una serie di esercitazioni, alcune delle quali da svolgere a casa individualmente. Tutte le esercitazioni sono indispensabili per una adeguata comprensione degli argomenti del corso.

Attività di tutorato. Al termine delle lezioni, in corrispondenza degli appelli di gennaio e febbraio 2020, sono previste alcune esercitazioni aggiuntive in aula (tutoraggio). Informazioni più dettagliate a riguardo saranno fornite a tempo debito. Le ore complessive per queste attività di tutorato sono 20.

Modalità di esame. La prova di esame consiste in una prova scritta (di circa 2 ore e 30 minuti) seguita da una prova orale (di circa 30 minuti). Per la prova scritta si potrà usare solamente una calcolatrice e non sarà consentito utilizzare nessun altro materiale (libri, appunti ecc.). Saranno ammessi alla prova orale soltanto gli studenti che avranno riportato un voto maggiore od uguale a 15/30 nella prova scritta. Per sostenere le prove lo studente deve presentarsi munito di tessera universitaria, ovvero di libretto universitario, o di idoneo documento di riconoscimento.

Conoscenze preliminari. Per seguire con profitto il corso non sono richieste particolari conoscenze preliminari di probabilità. Il corso si rivolge a studenti che abbiano già seguito almeno un corso introduttivo di teoria della probabilità. Vengono assunte per note tutte le nozioni usualmente impartite in un primo corso universitario di probabilità e statistica. Si assume in particolare che siano note le principali distribuzioni univariate, sia discrete che continue, nonché i principali teoremi limite quali la legge (debole) dei grandi numeri ed il teorema del limite centrale.

Obiettivi formativi. Il corso si propone di integrare ed estendere la preparazione probabilistica già acquisita degli studenti del primo anno dell'indirizzo di *Finanza Quantitativa* del corso di laurea magistrale in *Banca e Finanza*, introducendo alcuni dei concetti propedeutici ad un uso avanzato della teoria della probabilità e dei processi stocastici a parametro discreto e a parametro continuo, nonché degli integrali stocastici. Questi obiettivi devono essere considerati nell'ottica del piano didattico complessivo dell'indirizzo di *Finanza Quantitativa* del corso di laurea magistrale in *Banca e Finanza*, caratterizzato dai seguenti quattro insegnamenti (assenti nell'indirizzo di *Gestione degli Intermediari Finanziari*):

- *Modelli stocastici per la finanza* (9 cfu, 1° anno, 1° semestre);
- *Finanza matematica* (9 cfu, 1° anno, 2° semestre);
- *Derivati* (9 cfu, 2° anno, 1° semestre);
- *Modelli di asset pricing* (9 cfu, 2° anno, 2° semestre);

nonché dai seguenti due insegnamenti a scelta:

- *Matematica delle assicurazioni* (6 cfu, 2° anno, 1° semestre);
- *Metodi computazionali per la finanza* (6 cfu, 2° anno, 1° semestre).

Nell'ottica del curriculum di *Finanza Quantitativa*, nel quale questi insegnamenti, nel loro insieme, possono essere visti come costituire un unico macro insegnamento, l'obiettivo principale dell'insegnamento di *Modelli stocastici per la finanza* è quello di innalzare il livello di conoscenze probabilistiche e di introdurre gli indispensabili concetti relativi ai processi stocastici in modo da preparare gli studenti del primo anno a seguire con profitto l'insegnamento seguente di *Finanza matematica*, e quindi gli insegnamenti più finalizzati del secondo anno.

PROGRAMMA

Spazi di probabilità e assiomi di Kolmogorov

Richiami di calcolo combinatorio: permutazioni, disposizioni, combinazioni, disposizioni con ripetizione, permutazioni tra elementi non tutti distinti.

Spazi di probabilità: spazio campionario, eventi, algebre degli eventi, sigma-algebre, sigma-algebra di Borel, funzione di probabilità e assiomi di Kolmogorov, primi teoremi della probabilità, spazi di probabilità finiti e infiniti, misura di Lebesgue, interpretazioni della probabilità, alberi degli eventi.

Probabilità condizionata: definizione elementare di probabilità condizionata di un evento rispetto ad un altro evento, proprietà, legge del prodotto, teorema delle probabilità totali, teorema di Bayes, indipendenza tra eventi, passeggiata casuale.

Variabili casuali

Variabili casuali: misurabilità, funzione di ripartizione, variabili casuali discrete, distribuzione di probabilità, variabili casuali assolutamente continue, densità di probabilità, variabili casuali continue singolari.

Trasformazioni di variabili casuali: trasformazioni biunivoche, distribuzione log-normale, trasformazioni non biunivoche, trasformazione integrale di probabilità.

Valore atteso

Teoria dell'integrazione: richiami sull'integrale di Riemann, integrale di Riemann-Stieltjes, integrale di Lebesgue (generalizzato), valore atteso, interpretazioni del valore atteso, paradosso di San Pietroburgo (cenni).

Valore atteso di una funzione di una variabile casuale: risultati principali, varianza, proprietà del valore atteso e della varianza.

Disuguaglianze notevoli: disuguaglianza di Markov, disuguaglianza di Tchebycheff, disuguaglianza di Jensen.

Momenti: momenti assoluti, momenti centrali, funzione generatrice dei momenti.

Variabili casuali multidimensionali

Variabili casuali multidimensionali: funzione di ripartizione congiunta, funzioni di ripartizione marginali, variabili casuali multidimensionali discrete, distribuzioni di probabilità congiunte e marginali, variabili casuali multidimensionali continue, funzioni di densità congiunte e marginali.

Distribuzioni condizionate: funzione di ripartizione condizionata, distribuzione di probabilità condizionata per variabili casuali discrete, funzione di densità condizionata per variabili casuali continue, interpretazione geometrica della densità condizionata, alcune generalizzazioni del teorema delle probabilità totali.

Indipendenza tra variabili casuali: definizioni, proprietà, esempi notevoli.

Funzioni di variabili casuali multidimensionali

Funzioni di variabili casuali multidimensionali: valore atteso di funzioni di variabili casuali, valore atteso di una combinazione lineare, covarianza, coefficiente di correlazione di Bravais, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, varianza di una combinazione lineare, valore atteso e varianza della media campionaria.

Valore atteso condizionato: valore atteso condizionato rispetto ad un'altra variabile casuale, probabilità condizionata rispetto ad una variabile casuale, varianza condizionata rispetto ad un'altra variabile casuale, principali proprietà.

Momenti misti assoluti, momenti misti centrali.

Distribuzione normale bidimensionale: densità congiunta, valori attesi, varianze, covarianza e coefficiente di correlazione di Bravais, densità marginali, densità condizionate.

Distribuzione di funzioni di variabili casuali multidimensionali

Metodo della funzione di ripartizione: esempi notevoli.

Distribuzione della somma e della differenza di due variabili casuali: formula di convoluzione, esempi.

Distribuzione del prodotto e del quoziente: esempi notevoli.

Distribuzione della somma di un numero casuale di variabili casuali: esempi notevoli.

Somma di variabili casuali normali.

Metodo della trasformazione per variabili casuali continue (cenni).

Convergenza di successioni di variabili casuali e principali teoremi limite

Richiami sui limiti di successioni di numeri reali.

Principali modi di convergenza: convergenza quasi certa (con probabilità uno), convergenza in probabilità, convergenza in distribuzione, convergenza in media quadratica, esempi e controesempi notevoli.

Legge debole dei grandi numeri: teorema di Tchebycheff, legge (debole) dei grandi numeri di Bernoulli per frequenze relative, esempi notevoli.

Teorema del limite centrale: distribuzioni limite e distribuzioni asintotiche, approssimazione della distribuzione binomiale alla normale, esempi notevoli.

Legge forte dei grandi numeri: enunciato ed esempi notevoli.

Statistiche d'ordine: definizioni ed esempi.

Funzione di ripartizione empirica: definizioni, distribuzione della funzione di ripartizione empirica, enunciato del teorema di Glivenko-Cantelli.

Valore atteso condizionato rispetto ad una partizione e rispetto ad una sigma-algebra

Valore atteso condizionato rispetto ad un evento: definizione e proprietà.

Probabilità condizionata di un evento rispetto ad una partizione: definizioni, algebra indotta da una partizione, ordinamento tra partizioni, algebre indipendenti, probabilità condizionata dell'unione di due eventi, valore atteso della probabilità condizionata.

Probabilità condizionata di un evento rispetto ad una variabile casuale: definizioni, partizione indotta da una variabile casuale, proprietà.

Valore atteso condizionato di una variabile casuale rispetto ad una partizione: definizioni, valore atteso condizionato di una combinazione lineare, valore atteso del valore atteso condizionato, misurabilità rispetto ad una partizione, principali proprietà.

Valore atteso condizionato rispetto ad una sigma-algebra: definizioni, analogo con il valore atteso condizionato rispetto ad una partizione, principali proprietà.

Processi stocastici a tempo discreto

Filtrazioni: definizioni, filtrazioni indotte, esempi notevoli.

Processi stocastici: definizioni, processi stocastici a tempo discreto, processi stocastici a tempo continuo, distribuzioni finito-dimensionali, processi stazionari in senso forte e debole (cenni), processi gaussiani (cenni), processi a incrementi indipendenti (cenni).

Processi markoviani: definizioni.

Martingale a tempo discreto

Martingale rispetto a partizioni: definizioni, esempi notevoli, principali risultati, tempi di arresto, impossibilità di una strategia di arresto vincente.

Trasformate di martingala: differenza di martingala, sequenze predicibili, trasformata di martingala, impossibilità di una strategia di scommesse vincente.

Martingale rispetto a sigma-algebre: definizioni.

Processi stocastici a tempo continuo

Processi stocastici a tempo continuo: definizioni, filtrazioni, processi adattati ad una filtrazione; martingale, processi markoviani.

Moto browniano: definizione di moto browniano (processo di Wiener), definizione rispetto ad una filtrazione, distribuzioni finito-dimensionali, proprietà di martingala, non derivabilità e variazione infinita delle traiettorie (cenni), proprietà di Markov.

Integrale stocastico

Integrale stocastico di Itô: integrale di Itô di un processo semplice rispetto al moto browniano, proprietà di martingala.

Integrale di Itô di un processo generico: definizione, principali proprietà, esempi notevoli.

Formula di Itô: analogo a tempo discreto della formula di Itô per trasformate di martingala, formula di Itô per il moto browniano.

Cambio di misura: derivata di Radon-Nikodým nel caso di uno spazio campionario finito ed in generale, processo “derivata di Radon-Nikodým” nel caso di uno spazio campionario finito ed in generale.

LIBRI DI TESTO

A. M. Mood, F. A. Graybill, D. C. Boes (1991). *Introduzione alla Statistica*. McGraw-Hill, Milano.

R. V. Hogg, A. T. Craig (1994). *Introduction to Mathematical Statistics, 5th Edition*. Macmillan.

B. V. Gnedenko (1979). *Teoria della Probabilità*. Editori Riuniti, Roma.

A. N. Shiryaev (1996). *Probability, 2nd Edition*. Springer.

S. E. Shreve (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer.

S. E. Shreve (2004). *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*. Springer.

GUIDA ALLO STUDIO

Durante lo svolgimento del corso sarà indicato, per ogni specifico argomento, quali parti studiare dei libri di testo e quali altri testi consultare. Gli studenti non frequentanti possono rivolgersi al docente per avere le indicazioni necessarie. In aggiunta ai libri di testo, materiale didattico integrativo, appunti, esercizi e compiti passati con soluzioni saranno distribuiti durante il corso e resi disponibili sulla piattaforma E-learning di Ateneo.

GUIDA ALLO STUDIO DEGLI APPUNTI (a cura del docente) “Introduction to the Theory of Probability: From Combinatorics to Stochastic Integration”

Le seguenti parti degli appunti sono da considerarsi come “lettura”:

pag. 3; pagg. 77-80; pagg. 126-127; pag. 171; pag. 211; pag. 213; pag. 217; pag. 262.

Le seguenti parti degli appunti sono escluse dal programma:

pag. 73, dimostrazione Th. 5.11; **pag. 83**, dimostrazione; **pagg. 129-133**;
pag. 135, dimostrazione Th. 5.7; **pag. 137**; **pag. 141**; **pag. 147**, dimostrazione Th. 4.11;
pag. 148, dimostrazione Corollario;
pagg. 164-165; **pag. 169**, Esercizio 1; **pag. 170**; **pag. 180**, dimostrazione Th. 6.5;
pagg. 185-189 (a parte l’enunciato del Teorema alla fine di pag. 189);
pagg. 192-194 (a parte la funzione di ripartizione empirica);
pag. 206, dimostrazione; **pag. 207**, dimostrazione; **pag. 208**, dimostrazione;
pag. 209, Proprietà e dimostrazione Corollario; **pag. 212**, Teorema 1;
pag. 220, Definizione di catena di Markov; **pagg. 221-226**; **pag. 233**, Esempio 4;
pag. 239, Esempio; **pagg. 251-252**; **pag. 254**, Theorem; **pag. 255**, dimostrazione;
pag. 258, dimostrazione; **pag. 259**, Theorem; **pagg. 260-261**; **pag. 264**, punti v) e vi) del Th. 4.3.1;
pag. 271, dimostrazione; **pag. 272**, N. B.; **pag. 278**; **pag. 282**, ultimo Lemma.

GUIDA ALLO STUDIO DEI LIBRI DI TESTO

A. M. Mood, F. A. Graybill, D. C. Boes (1991). *Introduzione alla Statistica*. McGraw-Hill, Milano.

CAPITOLO 1. Probabilità

1.1. Introduzione

1.2. Concetto di probabilità

1.2.2. Introduzione **[lettura]**

1.2.2. Probabilità classica **[lettura]**

1.2.3. Probabilità frequentista **[lettura]**

1.3. Definizione assiomatica di probabilità

1.3.1. Modelli di probabilità

1.3.2. Una parentesi: la teoria degli insiemi **[ripasso]**

1.3.3. Definizioni di spazio campionario e di evento

1.3.4. Definizione di probabilità

1.3.5. Spazi campionari finiti **[no Esempio 1.20]**

1.3.6. Probabilità condizionata e indipendenza **[no Esempio 1.28]**

CAPITOLO 2. Variabili casuali, funzioni di ripartizione e valore atteso

2.1. Introduzione

2.2. Variabile casuale e funzione di ripartizione

2.2.1. Introduzione

2.2.2. Definizioni

2.3. Funzioni di densità

2.3.1. Variabili casuali discrete

2.3.2. Variabili casuali continue

2.3.3. Altre variabili casuali

2.4. Valori attesi e momenti

2.4.1. Media

2.4.2. Varianza

2.4.3. Valore atteso di una funzione di una variabile casuale

2.4.4. Disuguaglianza di Tchebycheff

- 2.4.5. Disuguaglianza di Jensen
- 2.4.6. Momenti e funzione generatrice dei momenti

CAPITOLO 3. Particolari famiglie parametriche di distribuzioni unidimensionali

- 3.1. Introduzione
- 3.2. Distribuzioni discrete
 - 3.2.1. Distribuzione uniforme discreta **[ripasso]**
 - 3.2.2. Distribuzione di Bernoulli e distribuzione binomiale **[ripasso]**
 - 3.2.3. Distribuzione ipergeometrica **[no]**
 - 3.2.4. Distribuzione di Poisson **[ripasso; no Teorema 3.7 e Teorema 3.8]**
 - 3.2.5. Distribuzione geometrica e binomiale negativa **[ripasso; binomiale negativa: solo definizione]**
 - 3.2.6. Altre distribuzioni discrete **[no]**
- 3.3. Distribuzioni continue
 - 3.3.1. Distribuzione uniforme o rettangolare **[ripasso]**
 - 3.3.2. Distribuzione normale **[ripasso; no pag. 118]**
 - 3.3.3. Distribuzioni gamma ed esponenziali **[ripasso; distribuzione gamma: lettura]**
 - 3.3.4. Distribuzione beta **[lettura]**
 - 3.3.5. Altre distribuzioni continue **[lettura]**
- 3.4. Commenti
 - 3.4.1. Approssimazioni **[no]**
 - 3.4.2. Relazione fra esponenziale e Poissoniana **[lettura]**
 - 3.4.3. Mistura di distribuzioni e distribuzioni troncate **[lettura]**

CAPITOLO 4. Distribuzioni congiunte e condizionate, indipendenza stocastica e valore atteso

- 4.1. Introduzione
- 4.2. Funzioni di ripartizione congiunte
 - 4.2.1. Funzione di ripartizione
 - 4.2.2. Funzioni di densità congiunte per variabili casuali discrete **[no pag. 147]**
 - 4.2.3. Funzioni di densità congiunte per variabili casuali continue
- 4.3. Distribuzioni condizionate e indipendenza stocastica
 - 4.3.1. Funzioni di ripartizione condizionate per variabili casuali discrete
 - 4.3.2. Funzioni di ripartizione condizionate per variabili casuali continue
 - 4.3.3. Ancora sulle funzioni di ripartizione condizionate
 - 4.3.4. Indipendenza
- 4.4. Valore atteso
 - 4.4.1. Definizione
 - 4.4.2. Covarianza e coefficiente di correlazione
 - 4.4.3. Valori attesi condizionati
 - 4.4.4. Momenti misti e funzione generatrice dei momenti congiunta
 - 4.4.5. Indipendenza e valore atteso
 - 4.4.6. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz
- 4.5. Distribuzione normale bidimensionale
 - 4.5.1. Funzione di densità
 - 4.5.2. Funzione generatrice dei momenti e momenti
 - 4.5.3. Densità marginali e condizionate

CAPITOLO 5. Distribuzioni di funzioni di variabili casuali

- 5.1. Introduzione
- 5.2. Valori attesi di funzioni di variabili casuali
 - 5.2.1. Due metodi per ottenere il valore atteso
 - 5.2.2. Somma di variabili casuali
 - 5.2.3. Prodotto e quoziente **[no Formula 5.13 e Teorema 5.4]**
- 5.3. Metodo della funzione di ripartizione
 - 5.3.1. Descrizione del metodo
 - 5.3.2. Distribuzione del minimo e del massimo **[no]**

- 5.3.3. Distribuzione della somma e della differenza di due variabili
- 5.3.4. Distribuzione del prodotto e del quoziente [**tutto tranne Teorema 5.8**]
- 5.4. Metodo della funzione generatrice dei momenti
 - 5.4.1. Descrizione del metodo
 - 5.4.2. Distribuzione della somma di variabili casuali indipendenti [**no Esempio 5.13**]
- 5.5. La trasformazione $Y = g(X)$
 - 5.5.1. La distribuzione di $Y = g(X)$
 - 5.5.2. Trasformazione integrale di probabilità
- 5.6. Trasformazioni
 - 5.6.1. Variabili casuali discrete
 - 5.6.2. Variabili casuali continue [**lettura**]

CAPITOLO 6. Campionamento e distribuzioni campionarie

- 6.1. Introduzione
- 6.2. Campionamento [**no**]
- 6.3. Media campionaria
 - 6.3.1. Media e varianza
 - 6.3.2. Legge dei grandi numeri
 - 6.3.3. Teorema limite centrale
 - 6.3.4. Distribuzioni di Bernoulli e di Poisson
 - 6.3.5. Distribuzione esponenziale [**no**]
 - 6.3.6. Distribuzione uniforme [**no**]
 - 6.3.7. Distribuzione di Cauchy [**no**]
- 6.4. Campionamento da distribuzioni normali [**no**]
- 6.5. Statistiche d'ordine
 - 6.5.1. Definizione e distribuzioni [**no pag. 260-261**]
 - 6.5.2. Distribuzione di funzioni delle statistiche d'ordine [**no**]
 - 6.5.3. Distribuzioni asintotiche [**no Teorema 6.16**]
 - 6.5.4. Funzione di ripartizione campionaria

CAPITOLO 11. Metodi non parametrici

- 11.1. Introduzione
- 11.2. Inferenze riguardanti la funzione di ripartizione
 - 11.2.1. Funzione di ripartizione empirica o campionaria [**no Formula 11.7**]
 - 11.2.2. Test di adattamento di Kolmogorov-Smirnov [**no**]
 - 11.2.3. Fasce di confidenza per la funzione di ripartizione [**no**]

APPENDICE A. Appendice matematica

- A.1. Introduzione
- A.2. Calcolo combinatorio
 - A.2.1. Notazione di sommatoria e di produttoria [**ripasso**]
 - A.2.2. Simbolo combinatorio e fattoriale e convenzioni [**ripasso**]
 - A.2.3. Formula di Stirling [**no**]
 - A.2.4. Teorema binomiale e multinomiale [**ripasso; no multinomiale**]
- A.3. Analisi matematica
 - A.3.1. Preliminari [**ripasso**]
 - A.3.2. Serie di Taylor [**ripasso**]
 - A.3.3. Funzione beta e funzione gamma [**lettura**]

R. V. Hogg, A. T. Craig (1994). *Introduction to Mathematical Statistics, 5th Edition.* Macmillan.

CHAPTER 5. Limiting Distributions

5.1. Limiting Distributions

- 5.2. Stochastic Convergence [no]
- 5.3. Limiting Momen-Generating Functions [no]
- 5.4. The Central Limit Theorem [no]
- 5.5. Some Theorem on Limiting Distributions [no]

B. V. Gnedenko (1979). *Teoria della Probabilità*. Editori Riuniti, Roma.

CAPITOLO VI. Legge dei grandi numeri

- § 31. Fenomeni su vasta scala e legge dei grandi numeri [lettura]
- § 32. Legge dei grandi numeri nella forma di Čebyšev [no]
- § 33. Condizione necessaria e sufficiente per la legge dei grandi numeri [no]
- § 34. Legge forte dei grandi numeri [no pagine 218-223]

A. N. Shiryaev (1996). *Probability, 2nd Edition*. Springer.

CHAPTER 1. Elementary Probability Theory

- §8. Conditional Probabilities and Mathematical Expectation with Respect to Decompositions
- §11. Martingales. Some Applications to the Random Walk [no Theorem 2]

S. E. Shreve (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer.

CHAPTER 3. Brownian Motion

- 3.1. Introduction
- 3.2. Scaled Random Walks
 - 3.2.1. Symmetric Random Walk [lettura]
 - 3.2.2. Increments of the Symmetric Random Walk [lettura]
 - 3.2.3. Martingale Property for the Symmetric Random Walk [lettura]
 - 3.2.4. Quadratic Variation of the Symmetric Random Walk [lettura]
 - 3.2.5. Scaled Symmetric Random Walk [lettura]
 - 3.2.6. Limiting Distribution of the Scaled Random Walk [lettura]
 - 3.2.7. Log-Normal Distribution as the Limit of the Binomial Model [lettura]
- 3.3. Brownian Motion
 - 3.3.1. Definition of Brownian Motion
 - 3.3.2. Distribution of Brownian Motion
 - 3.3.3. Filtration for Brownian Motion
 - 3.3.4. Martingale Property for Brownian Motion
- 3.4. Quadratic Variation
 - 3.4.1. First-Order Variation [lettura]
 - 3.4.2. Quadratic Variation
 - 3.4.3. Volatility of Geometric Brownian Motion [no]
- 3.5. Markov Property

CHAPTER 4. Stochastic Calculus

- 4.1. Introduction
- 4.2. Itô's Integral for Simple Integrand
 - 4.2.1. Construction of the Integral
 - 4.2.2. Properties of the Integral
- 4.3. Itô's Integral for General Integrand
- 4.4. Itô-Doebelin Formula
 - 4.4.1. Formula for Brownian Motion
 - 4.4.2. Formula for Itô Processes [no]
 - 4.4.3. Examples [no]

S. E. Shreve (2004). *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*. Springer.

CHAPTER 3. State Prices

3.1. Change of Measure [lettura]

3.2. Radon-Nikodým Derivative Process [lettura]

TESTI DI APPROFONDIMENTO

Testi di approfondimento generici di calcolo delle probabilità

P. Baldi (2011). *Calcolo delle Probabilità, Seconda Edizione*. McGraw-Hill, Milano

G. Casella, R. L. Berger (2002). *Statistical Inference, 2nd Edition*. Duxbury Advanced Series.

D. M. Cifarelli (1998). *Introduzione al Calcolo delle Probabilità*. McGraw-Hill, Milano.

W. Feller (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, 3rd Edition, Volume 1*. Wiley.

J. Jacod, P. Protter (2000). *Probability Essentials*. Springer.

S. Lipschutz (1975). *Calcolo delle Probabilità, Collana SCHAUM*. ETAS Libri.

G. R. Grimmett, D. R. Stirzaker (2001). *Probability and Random Processes, 3rd Edition*. Oxford University Press.

G. R. Grimmett, D. R. Stirzaker (1991). *Probability and Random Processes. Solved Problems, 2nd Edition*. The Clarendon Press, Oxford University Press.

G. R. Grimmett, D. R. Stirzaker (2001). *One Thousand Exercises in Probability*. Oxford University Press.

Testi di approfondimento specifici di calcolo stocastico

P. Baldi (1984). *Equazioni Differenziali Stocastiche e Applicazioni, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, n. 28*. Pitagora Editrice, Bologna.

G. Da Prato (1998). *Introduction to Differential Stochastic Equations, 2nd Edition, Collana Appunti*. Scuola Normale Superiore, Pisa.

T. Mikosch (1999). *Elementary Stochastic Calculus With Finance in View*. World Scientific, Singapore.

M. Musiela, M. Rutkowski (1997). *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer.

P. Protter (1990). *Stochastic Integration and Differential Equations: A New Approach*. Springer.