Modelli stocastici per la volatilità II

Processi GARCH(p,q)

Difficoltà nell'individuazione dell'ordine dei modelli ARCH.
Modelli ARCH con struttura dei ritardi piuttosto lunga per catturare la lunga memoria dei dati.

$$\Downarrow$$

Processi GARCH

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \qquad z_t \sim NID(0,1) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_t \mid I_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_j h_{t-j} = \omega + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L) h_t \qquad (1)$$

con

$$\alpha(L) = \alpha_1 L + \ldots + \alpha_p L^p \quad \text{e} \quad \beta(L) = \beta_1 L + \ldots + \beta_q L^q$$

$$p, q > 0,\ \omega > 0,\ \alpha_i, \beta_j \geq 0,\ i = 1, \ldots, p,\ j = 1, \ldots, q.$$

Rappresentazione ARMA di un GARCH(*p*,*q*)

Aggiungendo ε_t^2 e $\beta(L)\varepsilon_t^2$

ad entrambi i membri della (1) e spostando h_t nel membro di destra, si ha

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{m}(\alpha_i + \beta_i)\varepsilon_{t-i}^2 - \sum_{i=1}^{q}\beta_j v_{t-j} + v_t$$

che è un modello ARMA(*m*,*q*) con *m*=max(*p*,*q*), $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$ $\alpha_i = 0$ per $i > p$

$\beta_j = 0$ per $j > q$

Esempio: GARCH(2,1)

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha_1 + \beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + v_t - \beta_1 v_{t-1}$$
$$\Rightarrow ARMA(2,1)$$

Esempio: GARCH(1,2)

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha_1 + \beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_2\varepsilon_{t-2}^2 + v_t - \beta_1 v_{t-1} - \beta_2 v_{t-2}$$
$$\Rightarrow ARMA(2,2)$$

Condizioni di stazionarietà per un GARCH(*p*,*q*)

- Un processo GARCH(*p*,*q*) è stazionario in senso debole se e solo se

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i + \sum_{j=1}^{q}\beta_j < 1$$

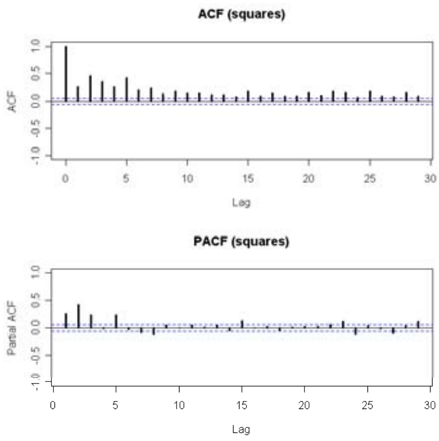
- Le condizioni

$$p, q > 0,\ \omega > 0,\ \alpha_i, \beta_j \geq 0,\ i = 1,\ldots,p,\ j = 1,\ldots,q.$$

sono sufficienti a garantire la non negatività della varianza.

Esempio. GARCH(2,2)

Correlogramma per i quadrati di un processo GARCH(2,2) simulato




```
 Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
a0 1.162e-02   1.600e-03    7.265 3.73e-13 ***
a1 2.101e-01   7.259e-03   28.945  < 2e-16 ***
a2 1.385e-01   4.615e-02    3.001  0.00269 **
b1 5.615e-02   2.274e-04   24.692  < 2e-16 ***
b2 3.097e-01   1.354e-01    2.287  0.02219 *
```

Stima dei parametri su processo GARCH(2,2) simulato

Il processo GARCH(1,1)

Caso particolare di un processo GARCH(*p,q*) con *p*=1 e *q*=1.

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \qquad z_t \sim NID(0,1) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_t \mid I_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \qquad (1)$$

N.B.: ricorda i modelli a varianza mobile

con $\omega > 0,\ \alpha_1, \beta_1 \geq 0 \qquad \alpha_1 + \beta_1 < 1$

Rappresentazione ARMA di un GARCH(1,1)

Aggiungendo ad ambo i membri della (1) la quantità $\varepsilon_t^2 + \beta_1 \varepsilon_{t-1}^2$ e ponendo

$v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$, si ottiene

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha_1 + \beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 - \beta_1 v_{t-1} + v_t \qquad \Rightarrow \qquad ARMA(1,1)$$

Dunque un GARCH(1,1) può essere interpretato come un ARMA(1,1) nei quadrati.

Condizioni di stazionarietà per un GARCH(1,1)

- La condizione di stazionarietà per un GARCH(1,1) è

- Sostituendo ad h_{t-1} la sua espressione e procedendo ricorsivamente, il processo (1) può essere riscritto nel seguente modo:

$$h_t = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_1^i \omega + \alpha_1 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_1^{i-1} \varepsilon_{t-i}^2$$

Processo GARCH(1,1) riscrivibile come un ARCH(∞);

⇩

GARCH(1,1) approssimabile con un ARCH(*p*) con *p* sufficientemente grande;
GARCH(1,1) descrizione più parsimoniosa di un ARCH di ordine elevato.

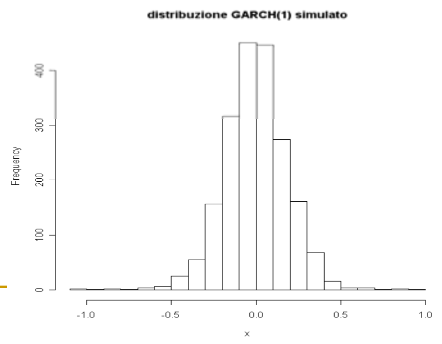
Caratteristiche empiriche di un GARCH(1,1)

-Condizionatamente all'assunzione che $z_t \sim NID(0,1)$ la curtosi di un processo GARCH(1,1) è data da

$$K_\varepsilon = \frac{3\left[1-(\alpha_1+\beta_1)^2\right]}{1-(\alpha_1+\beta_1)^2-2\alpha_1^2}$$

Poiché $\left[1-(\alpha_1+\beta_1)^2\right] > 1-(\alpha_1+\beta_1)^2-2\alpha_1^2$, la curtosi di un processo GARCH(1,1) è >3.

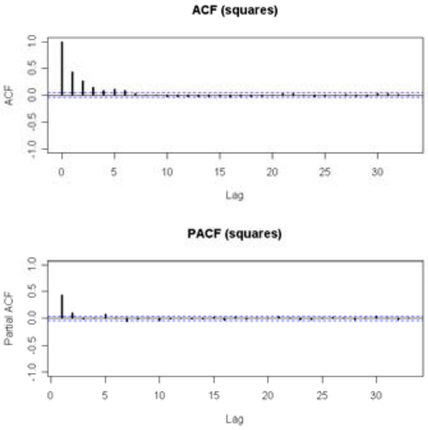
Statistiche descrittive per un GARCH(1,1) simulato



mediana	-0.005
media	-0.004
varianza	0.036
minimo	-1.050
massimo	0.988
asimmetria	-0.165
curtosi	5.337
jarque-bera	464.127
p-value jb	0

Alcuni esempi

Correlogramma per i quadrati di un GARCH(1,1) simulato



Stima di un GARCH(1,1) su ENI

```
 Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
a0 1.842e-06   6.161e-07    2.990  0.00279 **
a1 5.226e-02   8.188e-03    6.382 1.74e-10 ***
b1 9.373e-01   9.428e-03   99.421  < 2e-16 ***
```

Processi ARMA-GARCH

$$\phi(L)y_t = \mu + \theta(L)\varepsilon_t \qquad \varepsilon_t = z_t\sqrt{h_t} \qquad z_t \sim NID(0,1)$$

$$\varepsilon_t \mid I_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_j h_{t-j}$$

- Si noti che non è *y* a seguire il modello GARCH, ma ε.
- I modelli GARCH puri sono dei particolari ARMA-GARCH con

$$\phi(L) = \theta(L) = 1.$$