Introduzione ai processi stocastici

Definizione di variabile casuale continua

Una variabile casuale (o variabile stocastica) è una funzione a valori reali che è definita su uno spazio campionario (spazio degli eventi elementari) attraverso una misura di probabilità.

Ogni valore *x* della V.C. *X* è associato ad un evento elementare a cui corrisponde una misura di probabilità. Tale misura di probabilità viene chiamata *funzione di densità di probabilità f*(*x*) della V. C.

Ad ogni funzione di densità di probabilità corrisponde una *funzione di ripartizione* (o *funzione di distribuzione cumulata* = *CDF*):

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$$f(x) = F^{'}(x)$$

I momenti di una Variabile Casuale continua

- *Media* (o *valore atteso, o momento primo*):

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Il valore atteso è uno dei parametri fondamentali per la definizione di una funzione di densità. E' un parametro di posizione della funzione. Centro di gravità della funzione di densità.

- *Varianza* (o *momento secondo rispetto alla media*):

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Misura della dispersione della funzione di densità rispetto alla media

I processi stocastici

y_t realizzazione di una variabile aleatoria Y_t
$t = 1,2,\ldots,T$

Insieme delle V.A. Y_t è chiamato ***Processo Stocastico***.

Obiettivo dell'approccio moderno:
Stimare le caratteristiche del processo stocastico generatore a partire dai dati di una singola serie storica.

Esempio di un processo stocastico

I processi stocastici (2)

-Un P.S. è caratterizzato dalle relazioni fra le V.A. componenti

-Distribuzione di probabilità congiunta di

$$\left(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n}\right)$$

per ogni insieme $t_1, t_2, \ldots, t_n$

A rigore per conoscere un P.S. è necessario conoscere tutte le distribuzioni di probabilità congiunta e marginali.

I momenti di un P.S.

Media

$$\mu_t = E[Y_t]$$

Varianza

$$\sigma_t^{\,2} = Var(Y_t) = E[Y_t - \mu_t]^2$$

Autocovarianza

$$\gamma(t, t+k) = \mathrm{cov}[Y_t, Y_{t+k}] = E[(Y_t - \mu_t)(Y_{t+k} - \mu_{t+k})]$$

$$k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

dove k è il lag (o sfasamento temporale)

Se $k = 0$ si ottiene **l'autovarianza** (detta abitualmente **varianza**)

$$\gamma(t, t) = \mathrm{cov}[Y_t, Y_t] = Var[Y_t]$$

N.B.: l'autocovarianza è espressa nel quadrato dell'unità di misura di Y_t.

Processi stocastici stazionari

Stazionarietà in senso debole

Un processo si dice stazionario in senso debole fino all'*n*-esimo ordine se i suoi momenti fino all'ordine *n* esistono e sono invarianti temporalmente.

Stazionarietà di ordine 2 (o stazionarietà in covarianza): valgono le seguenti condizioni.

$$\mu_t = E[Y_t] = \mu \qquad \forall t \qquad (1)$$

$$\sigma_t^2 = Var(Y_t) = E[Y_t - \mu_t]^2 = \sigma^2 \qquad \forall t \qquad (2)$$

e l'autocovarianza dipende solo dallo sfasamento, cioè:

$$\gamma(t, t+k) = \gamma(k) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)] \qquad (3)$$

Misura le relazioni lineari fra coppie di V.A. di un P.S.

Processi stocastici stazionari (2)

Se due V.A. hanno la stessa distribuzione, hanno momenti uguali.

$\Downarrow$

Stazionarietà in senso stretto

$\Rightarrow$ Stazionarietà in senso debole

N.B.: Non vale l'implicazione inversa

Processi gaussiani → $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_k})$ Normale *k*-variata

Stazionarietà in senso stretto e in forma debole coincidono

Prezzi → processo non stazionario

Rendimenti → processo stazionario

Il P.S. white noise

$$\varepsilon_t \sim WN$$

se

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$\operatorname{var}(\varepsilon_t) = E\left(\varepsilon_t^2\right) = \sigma_\varepsilon^2$$

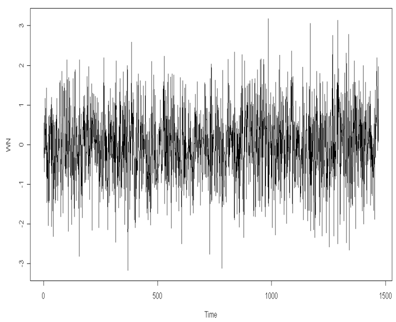
$$\gamma(k) = \operatorname{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = E\left[(\varepsilon_t - 0)(\varepsilon_{t-k} - 0)\right] = 0 \qquad \forall k \neq 0$$

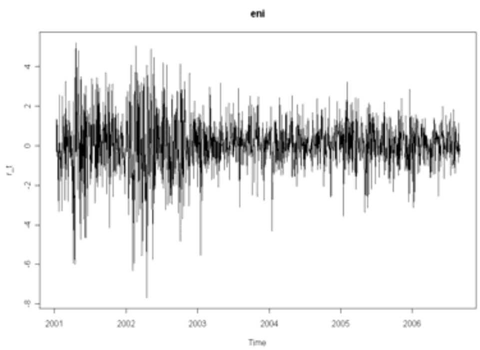
N.B.: la condizione posta sulla funz. di autocovarianza implica che le informazioni precedenti a *t* non abbiano alcuna utilità per la previsione lineare di ε_t

Il P.S. white noise (2)

WN metodo più semplice per descrivere i rendimenti finanziari che hanno valore atteso approssimativamente pari a zero.

…però non considera il volatility clustering





Funzione di autocorrelazione per P.S. stazionari

$$\rho(k)=\frac{\mathrm{cov}(Y_t,Y_{t+k})}{\sqrt{\mathrm{var}(Y_t)}\sqrt{\mathrm{var}(Y_{t+k})}}=\frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$

Quando il processo è stazionario si ha

$$\gamma(0)=\mathrm{var}(Y_t) \quad \Rightarrow \quad \rho(0)=1$$

$$|\gamma(k)|\le\gamma(0) \quad \Rightarrow \quad |\rho(k)|\le 1$$

$$\gamma(k)=\gamma(-k)$$

$\rho(k)=\rho(-k)$ funzioni pari

La funzione di autocorrelazione parziale

Correlazione tra Y_t e Y_{t+k} "al netto" delle variabili intermedie Y_{t+1}, Y_{t+2}, …, Y_{t+k-1}

$$P_k=corr\left(Y_t,Y_{t+k}\mid Y_{t+1},Y_{t+2},\ldots,Y_{t+k-1}\right)$$

Diversi metodi per ricavare i coefficienti di autocorrelazione parziale:

1. Regressione lineare multipla con variabile dipendente Y_{t+k} e variabili esplicative Y_{t+k-1}, Y_{t+k-2},…, Y_t;

2. Correlazione fra i residui di due modelli di regressione

3. Metodo di Durbin senza ricorso alle regressioni.

Correlogramma parziale: grafico di P_k per $k=0,1,2,\ldots$

(Ved. grafico precedente)

Stima dei momenti di un P.S. stazionario

-Si desidera fare inferenza sui parametri del P.S. partendo dall'osservazione della serie storica.

-Se il processo è stazionario, sotto condizioni di ergodicità, è possibile stimare in modo consistente i suoi momenti.

-Parametri di interesse:

$\mu \qquad \gamma(k) \qquad \rho(k)$

Media

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t$$

E' uno stimatore corretto, cioè

$$E[\hat{\mu}] = \mu$$

Stima dei momenti di un P.S. stazionario (2)

Autocovarianza

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-k}(Y_t - \hat{\mu})(Y_{t+k} - \hat{\mu})$$

Stimatore distorto, asintoticamente corretto e più efficiente dello stimatore in cui *T* viene sostituito da *T-k*.

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}(0) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T-k}(Y_t - \hat{\mu})^2$$

Autocorrelazione

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)}$$

Varianza della funzione di autocorrelazione per processi gaussiani

Hp. Nulla : $\rho_k = 0$

Per $k > m$, si può dimostrare che

$$\text{var}(\hat{\rho}_k) \cong \frac{1}{T}\sum_{i=-m}^{m} \rho_i^2$$

Dove m è il lag a partire dal quale la funz. di autocorrelazione è nulla

Sotto l'ipotesi nulla che $\rho_k = 0$ per $k > 0$, si ha

$$\text{var}(\hat{\rho}_k) \cong \frac{1}{T}$$

Si respinge l'H_0 di W.N. se

$$\hat{\rho}_k \notin \left\{ \frac{-z_p}{\sqrt{T}}, \frac{z_p}{\sqrt{T}} \right\} \quad \forall k$$

Operatori di serie storiche

<u>Operatore di sfasamento (o di ritardo) *L*</u>

$$Ly_t = y_{t-1}$$

Polinomio espresso in termini dell'operatore di sfasamento:

$$\theta_q(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \ldots + \theta_q L^q$$

Radici del polinomio: *q* valori di *L* che soddisfano l'equazione:

$$\theta_q(L) = 0$$

Esempio. $q = 1$

$$\theta_1(L) = 1 + \theta_1 L$$ La radice di tale polinomio sarà

$$L = -1/\theta_1$$

Se $|L| > 1$ si dice che la radice giace all'esterno del cerchio unitario. Nell'esempio ciò si realizza se $|\theta_1| < 1$

Operatori di serie storiche (2)

Operatore differenza prima Δ

$$\Delta = 1 - L$$

perciò

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

In generale

$$\Delta^d = (1 - L)^d$$

N.B.: la differenza prima elimina un trend di natura lineare.

L'operatore differenza τ-esima Δ_τ

$$\Delta_\tau = 1 - L^\tau, \qquad \tau = \ldots, -1, 0, +1, \ldots$$

$$\Delta_\tau y_t = y_t - y_{t-\tau}$$