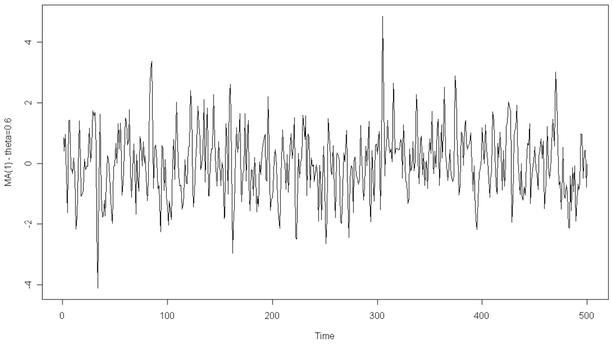
Modelli stocastici per i rendimenti finanziari

Alcuni processi stocastici lineari

Processo MA(1)

$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ con $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$



Esempio di generazione di un MA(1) e stima con R

Momenti di un MA(1). $\mu = 0$

$$E[Y_t] = E[\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}] = E[\varepsilon_t] + \theta_1 E[\varepsilon_{t-1}] = 0$$

$$\gamma_k = E[Y_{t-k}Y_t] = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2\left(1+\theta_1^2\right), & k = 0 \\ \sigma_\varepsilon^2\theta_1, & k = 1 \\ 0, & k > 1 \end{cases}$$

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{\theta_1}{1+\theta_1^2} & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

$$P_k = \frac{-\theta_1^k(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^{2(k+1)}} \quad k \geq 1$$

Caratteristiche di un processo MA(1)

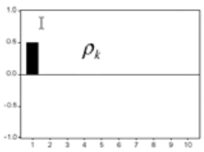
Media e varianza non sono funzioni del tempo → processo stazionario

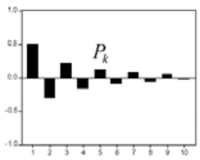
La funzione di autocorrelazione ha lo stesso segno di quello del parametro e decade a zero dopo il primo lag (*cut off*).

P_k ha una forma più complessa. Decade gradualmente (*tail off*). Se il parametro è positivo decade a segni alterni altrimenti è sempre negativa.

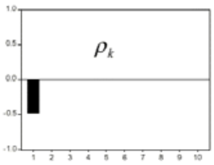
Esempi di ACF e PACF per processi MA(1)

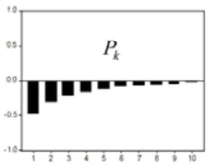
$\theta_1 = 0.8$





$\theta_1 = -0.8$

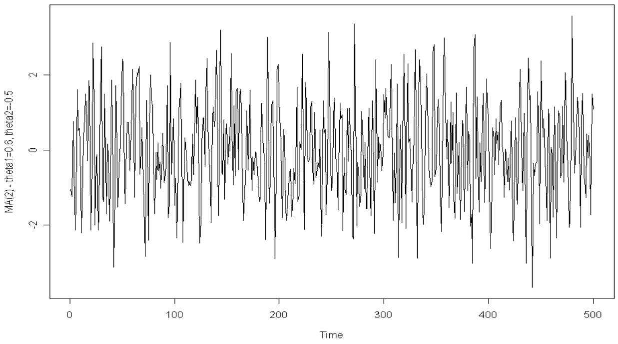




Il P.S. MA(q)

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \ldots + \theta_q\varepsilon_{t-q} \quad \text{con} \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$Y_t = \mu + \theta_q(L)\varepsilon_t$$



Esempio di generazione di un MA(2) e stima con R

Caratteristiche di un MA(q)

$$E[Y_t] = E[\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q\varepsilon_{t-q}] = 0$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2\left(1 + \sum_{i=1}^{q}\theta_i^2\right) & k = 0 \\ \sigma_\varepsilon^2\left(\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \theta_2\theta_{k+2} + \ldots + \theta_{q-k}\theta_q\right) & k = 1, \ldots, q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \dfrac{\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \theta_2\theta_{k+2} + \ldots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \ldots + \theta_q^2} & k = 1, \ldots, q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

Nella funzione di autocorrelazione si ha un *cut off* per $k > q$.

La funzione di autocorrelazione parziale presenta invece un *tail off* (a segni alterni o meno a seconda delle relazioni fra i parametri).

N.B.: Un processo MA(q) è sempre stazionario

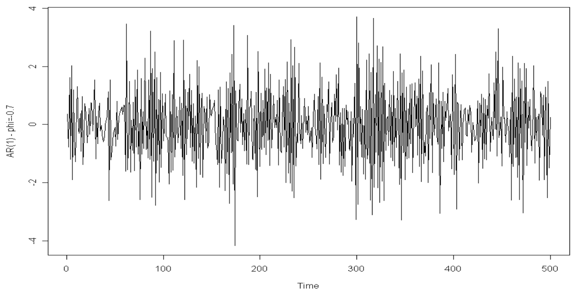
Il P.S. AR(1)

$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$ con $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2_\varepsilon)$

Si può scrivere

$(1 - \phi_1 L) Y_t = c + \varepsilon_t \qquad 1 - \phi_1 L = 0 \;\Rightarrow\; L = \frac{1}{\phi_1}$

Il processo è stazionario se $\left|\frac{1}{\phi_1}\right| > 1 \;\Rightarrow\; |\phi_1| < 1$



Esempio di generazione di un AR(1) e stima con R

Momenti di un AR(1). $c = 0$

$$E[Y_t] = E[\phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t] = \phi_1 E[Y_{t-1}] + E[\varepsilon_t]$$

Sotto l'Hp di stazionarietà, si ha $E[Y_t] = E[Y_{t-1}]$ e dunque

$$E[Y_t] = \phi_1 E[Y_t] \;\Rightarrow\; E[Y_t] = 0$$

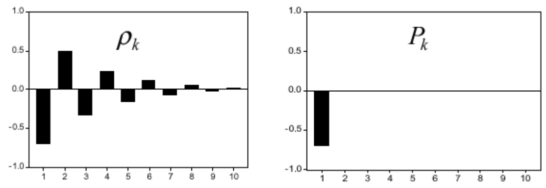
$$\gamma_k = E[Y_t Y_{t-k}] = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2_\varepsilon}{1-\phi_1^2} & k = 0 \\ \phi_1^k \gamma_0 & k > 0 \end{cases}$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi_1^k \qquad k \geq 0.$$

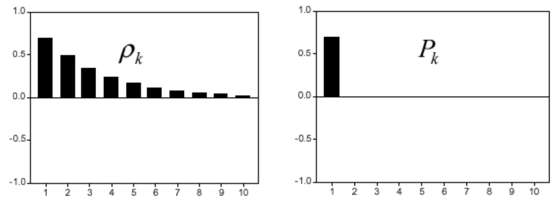
$$P_k = \begin{cases} \phi_1 & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

Caratteristiche di un AR(1)

$\phi_1 = -0,7$



$\phi_1 = 0,7$

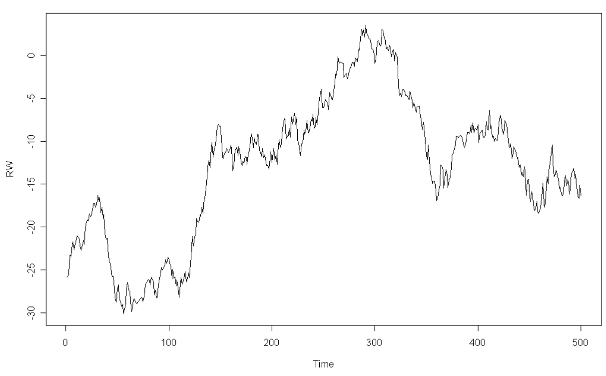


Il P.S. Random Walk come caso particolare di un AR(1)

Si ipotizza, senza perdita di generalità che $c = 0$.

Processo AR(1) con $\phi = 1$ → *Random walk*

$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$ con $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$



Esempio di generazione di un RW e stima con R

Il P.S. Random Walk (2)

-Caso particolare di efficienza informativa
-Buona approssimazione del processo generatore dei prezzi nell'ambito dei modelli lineari
Sostituendo ricorsivamente Y_t con la sua espressione si ottiene:

$$Y_t = Y_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$

N.B.: gli shock ε_i $i = 1,2,\ldots,t$ hanno lo stesso peso su Y_t. $\Rightarrow$ Shock permanenti

Nell'AR(1) stazionario con $|\phi_1| < 1$ si ha invece

$$Y_t = \frac{c}{1-\phi} + \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$$

per cui gli shock tendono ad annullarsi per $j \to \infty$ $\Rightarrow$ shock transitori

Il P.S. Random Walk (2)

<u>Media</u> $E(Y_t) = E(Y_0) + E\left(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i\right) = Y_0$

→ media aritmetica dei valori della serie non è un buono stimatore del valore atteso di un RW.

<u>Varianza</u>
Poiché il valore atteso è pari a Y_0 si ha $\gamma(0) = E\left[\left(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i\right)^2\right] = t\sigma^2$

<u>Autocovarianza</u>

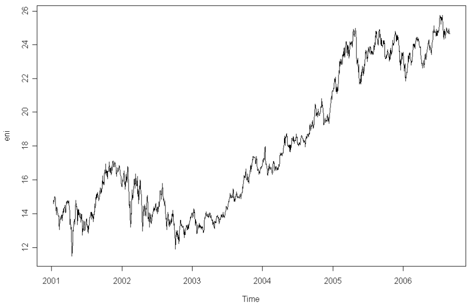
Si può dimostrare che $\gamma(k) = E(Y_t, Y_{t-k}) = (t-k)\sigma^2$

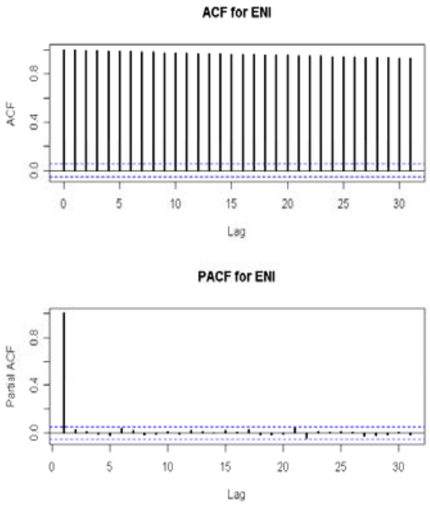
N.B.: varianza e covarianza crescono nel tempo → RW processo non stazionario in varianza.

<u>Autocorrelazione</u> $\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \frac{t-k}{t}$ k = 1,2, …

Se $t \to \infty$ $\Rightarrow$ $\rho(k) \to 1$

P.S. RW: esempio su ENI





Ved. R

Schema di autocorrelazione che potrebbe ricordare un AR(1):

Stima di un AR(1) sui prezzi (Es. MIDEX)

	coef	s.e.	t.stat	p.value
ar1	0.99861	0.001211	824.4503	0
intercept	17.96268	3.242497	5.539767	3.58E-08
	sigma2	loglik	aic	
	0.056323	25.51195	-45.0239	

Alcune considerazioni sul RW

-Quindi se T è sufficientemente elevato la funzione di autocorrelazione stimata è prossima ad uno per k = 1,2, …
-La funzione di autocorrelazione parziale ha un cut-off dopo k = 1
-La stima di un AR(1) porta alla stima di un parametro prossimo all'unità → radice sul cerchio unitario

⇒ tipico delle serie non stazionarie

⇩

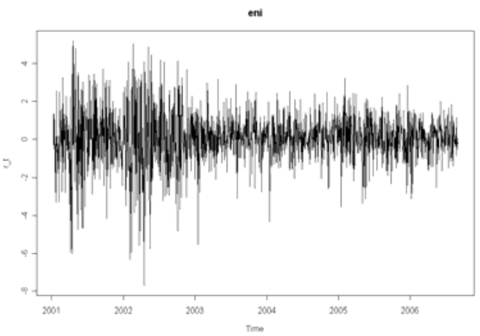
Differenziazione

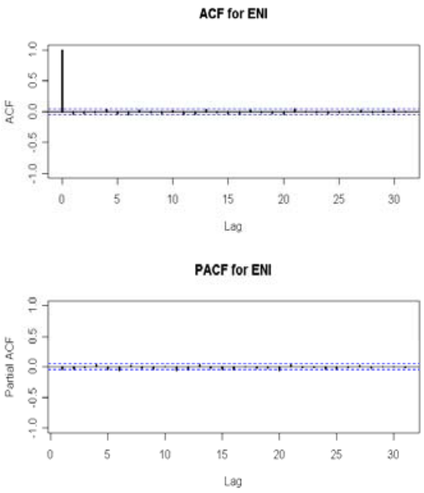
$$\Delta_1 Y_t = (1-L)Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

Il RW è anche non stazionario in varianza → trasformazione logaritmica.

$$\boxed{\Delta_1 \ln(P_t) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = p_t - p_{t-1} = r_t}$$

Dai prezzi ai rendimenti: stazionarietà





Processi AR(*p*)

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \quad \text{con} \quad \varepsilon_t \sim WN(0,\sigma_\varepsilon^2)$$

Polinomio autoregressivo corrispondente

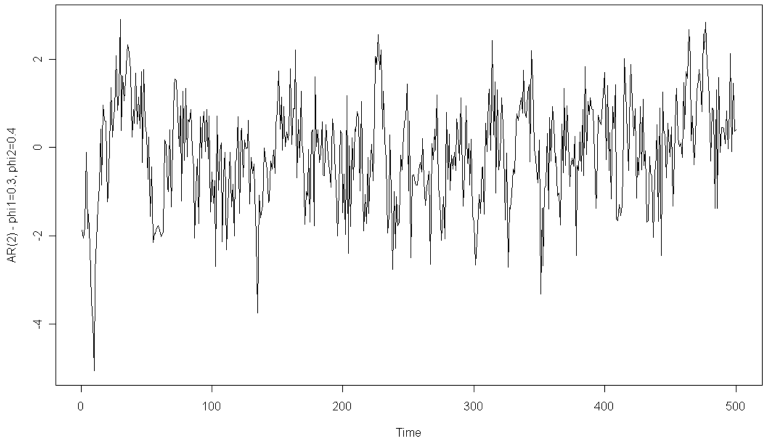
$$\phi_p(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots - \phi_p L^p$$

per cui

$$\phi_p(L)Y_t = c + \varepsilon_t$$

Processo stazionario se tutte le radici del polinomio autoregressivo sono esterne al cerchio di raggio unitario.

Processi AR(*p*) (2)



Esempio di generazione di un AR(2)

Momenti di un processo AR(*p*)

$$\mu = E[Y_t] = \frac{c}{1-\phi_1 - \ldots - \phi_p} \Rightarrow \mu = 0 \quad SSE \quad c = 0$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \phi_1\gamma_1 + \ldots + \phi_p\gamma_p + \sigma_\varepsilon^2 & k = 0 \\ \phi_1\gamma_{k-1} + \ldots + \phi_p\gamma_{k-p} & k > 0 \end{cases}$$

Dividendo ambo i membri dell'equazione precedente per γ_0 con $k = 0$, si ottiene:

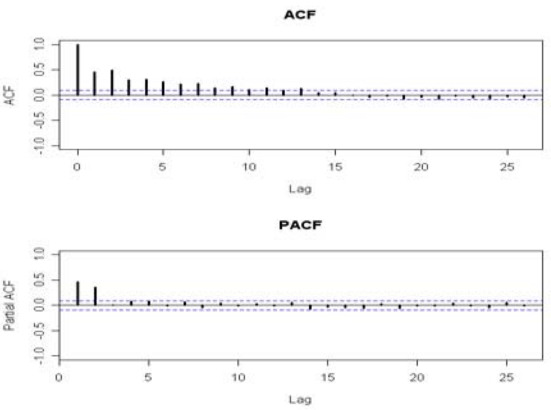
$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1\rho_1 - \ldots - \phi_p\rho_p}$$

Processi AR(*p*) (3)

L'ACF tende ad annullarsi al divergere di k, con comportamento misto tra l'esponenziale e lo pseudo-periodico.

P_k è diversa da zero per $k \leq p$ e si annulla per $k > p$.

Funzione di autocorrelazione per un AR(2) simulato



L'invertibilità dei P.S.

Processo stocastico stazionario $\Rightarrow \gamma_k$ e ρ_k definite in modo univoco.

E' vero il contrario? (Data una funzione di autocovarianza, è unico il P.S. stazionario che la possiede?)

Si può dimostrare che esistono più P.S. stazionari con la stessa funzione di autocovarianza. Uno solo, però, è invertibile.

Un P.S. è detto invertibile se è possibile ricostruire il valore dello shock ε_t sulla base dei soli valori delle osservazioni $y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots$

Tutti i processi AR sono invertibili, mentre ciò non è sempre vero per i processi MA. Tutti gli MA sono invece stazionari, ma ciò non è vero per gli AR
Affinché un processo MA sia invertibile è necessario che tutte le radici del polinomio MA siano esterne al cerchio di raggio unitario, cioè che tutte le radici siano in modulo superiori ad uno.

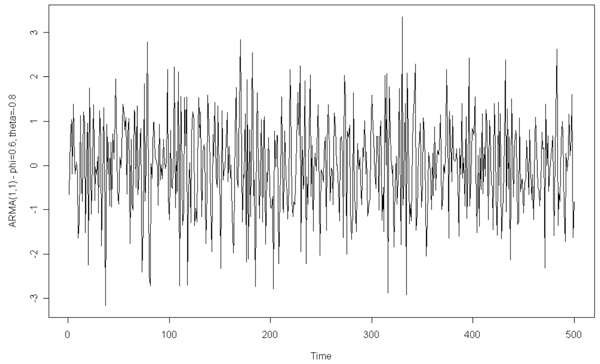
La condizione di invertibilità serve per identificare in maniera univoca un P.S. a partire dalle funzioni di autocorrelazione stimate.

Processi ARMA(1,1)

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

che si può anche scrivere come $(1-\phi_1 L)Y_t = c + (1+\theta_1 L)\varepsilon_t$

Processo stazionario se $|\phi_1| < 1$ Processo invertibile se $|\theta_1| < 1$



Esempio di generazione di un ARMA(1,1) e stima con R

Caratteristiche di un ARMA(1,1)

Si può dimostrare che per k=1 l'ACF ha una forma piuttosto complessa, funzione dei due parametri ϕ_1 e θ_1

Per k > 1 si ha $\rho_k = \phi_1^{k-1}\rho_1$

per cui tende a decadere con legge esponenziale o sinusoidale.

La PACF P_k tende ad annullarsi al crescere di k senza alcuna particolare struttura

Processi ARMA(p,q)

$$\phi_p(L)Y_t = c + \theta_q(L)\varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim WN(0,\sigma_\varepsilon^2)$$

$$\phi_p(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots - \phi_p L^p$$

$$\theta_q(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \ldots + \theta_q L^q$$

Verifica stazionarietà e invertibilità del processo sui due polinomi.

Il modello ARMA solitamente consente di evitare la sovraparametrizzazione → criterio della parsimonia

Le espressioni della funzione di autocovarianza e di autocorrelazione di un ARMA(p,q) sono piuttosto complesse. Le caratteristiche del correlogramma si possono sintetizzare come segue:

Fino al ritardo q l'ACF ha un comportamento "misto"; da q+1 in poi il comportamento è quello tipico di un MA(q).

Decadimento graduale della PACF senza un particolare pattern.

Comportamento delle ACF e PACF per processi ARMA

Processo	**ACF**	**PACF**
AR(*p*)	Tende ad annullarsi	Nulla dopo il lag *p*
MA(*q*)	Nulla dopo il lag *q*	Tende ad annullarsi
ARMA(*p*,*q*)	Tende ad annullarsi dopo il lag *q*	Tende ad annullarsi