Modelli stocastici per la volatilità

Introduzione ai modelli GARCH (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroschedasticity)

- In un modello GARCH si assume che i rendimenti siano generati da un processo stocastico con volatilità condizionata variabile nel tempo.
- Nei modelli ARMA abbiamo supposto che la media condizionata dei rendimenti fosse variabile nel tempo mettendola in relazione con alcune variabili esplicative. La componente d'errore del modello è considerata omoschedastica, cioè:

$$Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$$

Idea fondamentale dei modelli GARCH: aggiungere una seconda equazione a quella della media condizionata → **equazione della varianza condizionata.**

Perciò:

$$Var_t(\varepsilon_t) = \sigma_t^2$$

$$\Downarrow$$

Evoluzione temporale della varianza condizionata della componente erratica

AutoRegressive Conditionally Heteroscedastic (ARCH) Models

Base di partenza:

$\sigma_t^2 = \mathrm{Var}(\varepsilon_t \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2},\ldots) = \mathrm{E}[(\varepsilon_t - \mathrm{E}(\varepsilon_t))^2 \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2},\ldots]$

Poichè assumiamo che $\mathrm{E}(\varepsilon_t) = 0$

si ha che $\sigma_t^2 = \mathrm{Var}(\varepsilon_t \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2},\ldots) = \mathrm{E}[\varepsilon_t^2 \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2},\ldots]$

- **Quesito**: da cosa potrebbe plausibilmente dipendere il valore corrente della varianza dei disturbi?
  - **Dai quadrati dei disturbi precedenti**.
- Ciò conduce al modello AutoRegressivo a Eteroschedasticità Condizionata per la varianza dei disturbi:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

- Tale modello viene indicato con la sigla ARCH(1).

Introduzione ai modelli GARCH (2)

- La variabile dipendente di un modello GARCH per la volatilità è sempre una serie di rendimenti.
- Un modello GARCH è formato da due equazioni:
  - Equazione per la media condizionata
  - Equazione per la varianza condizionata

Introduzione ai modelli GARCH (3)

L'equazione per la media condizionata

Poiché l'attenzione nei modelli GARCH si concentra sulla varianza condizionata, solitamente l'equazione per la media condizionata è molto semplice:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t$$

In tale caso la costante è pari alla media dei rendimenti nel periodo considerato.

Se la funzione di autocorrelazione presenta valori significativi per alcuni sfasamenti si potrebbe utilizzare una media condizionata autoregressiva. Solitamente un modello AR(1) si rivela adeguato.

Introduzione ai modelli GARCH (4)

L'equazione per la varianza condizionata

Diverse tipologie di modelli GARCH in base alla forma dell'equazione per la varianza condizionata

Distinzione fra GARCH simmetrici e GARCH asimmetrici

simmetrici → catturano il volatility clustering ordinario; l'equazione per la media condizionata e quella per la varianza condizionata possono essere stimate separatamente;

Asimmetrici → catturano il *leverage effect*; l'equazione per la media condizionata e quella per la varianza condizionata devono essere stimate congiuntamente;

Il modello ARCH(1)

Eteroschedasticità condizionata autoregressiva (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*)

$\boxed{r_t = \mu + \varepsilon_t}$ ***Equazione per la media condizionata***

$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t}$ $z_t \sim IID(0,1)$ eventualmente normale

$\boxed{h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2}$ ***Equazione per la varianza condizionata***

dove $\omega > 0, \alpha_1 \geq 0$ per garantire la non negatività della varianza

$\varepsilon_t \mid I_{t-1} \sim IID(0, h_t)$ per cui

$$E\left(\varepsilon_t^2 \mid I_{t-1}\right) = h_t$$

ε_t condizionatamente eteroschedastico.

Si può dimostrare che la varianza non condizionata di ε_t è una costante (σ^2).

Il modello ARCH(1) (2)

Alcune considerazioni sui modelli ARCH(1)

1) $E(\varepsilon_t) = E(z_t)E\left(\sqrt{h_t}\right)$

2) Affinchè la varianza esista finita deve essere $\alpha_1 < 1$

3) per $\alpha_1 = 0$ la serie degli ε_t è condizionatamente omoschedastica

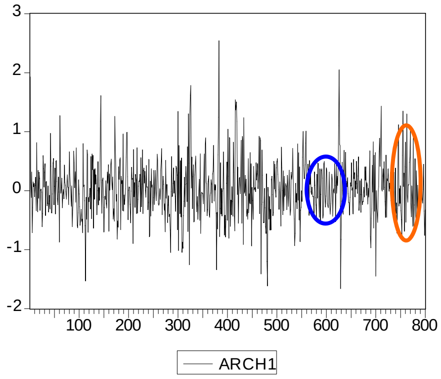
Il modello ARCH(1) (3)

I modelli ARCH(1) catturano il *volatility clustering*

Sostituendo la (2) nella (1) si ha:

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{\omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2}$$

Shock elevati (bassi) in valore assoluto tendono ad essere seguiti da shock elevati (bassi).



Modello ARCH(1) simulato con $\alpha_1 = 0.7$, T=800.

I modelli ARCH(1) (4)

I modelli ARCH catturano la leptocurtosi delle serie finanziarie

a) La curtosi di ε_t è sempre superiore a quella di z_t

$$E(\varepsilon_t^4) = E(z_t^4)E(h_t^2) \geq E(z_t^4)\left[E(h_t)\right]^2 = E(z_t^4)\left[E(\varepsilon_t^2)\right]^2$$

N.B.: Ricordare la disuguaglianza di Jensen

Per cui si può scrivere: $$\frac{E(\varepsilon_t^4)}{\left[E(\varepsilon_t^2)\right]^2} \geq E(z_t^4) = 3$$

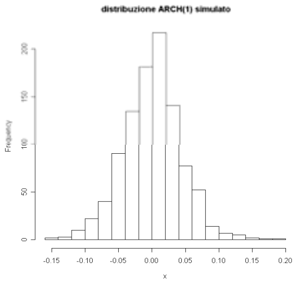
b) per i modelli ARCH(1) si può anche dimostrare che la curtosi di ε_t è data da:

$$\beta_2(\varepsilon_t) = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{\left[E(\varepsilon_t^2)\right]^2} = \frac{3(1-\alpha_1^2)}{1-3\alpha_1^2}$$

poiché $(1-\alpha_1^2) > 1-3\alpha_1^2$ allora $\beta_2(\varepsilon_t) > 3$

Esempio di simulazione ARCH(1)

I modelli ARCH(1) (5)



mediana	0.0014
varianza	0.0019
minimo	-0.1586
massimo	0.1829
asimmetria	0.0900
curtosi	4.0485
jarque-bera	47.1143
p-value jb	0.0000
n.oss	999

La forma distributiva di un processo ARCH(1) simulato

Stima di un modello ARCH(1) su dati reali (ENI)

```
Coefficient(s):
    Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
a0 1.604e-04   5.222e-06   30.709  < 2e-16 ***
a1 2.398e-01   3.140e-02    7.638  2.2e-14 ***
```

I modelli ARCH(1) (6)

Struttura di dipendenza dei quadrati degli shock in un modello ARCH(1)

Funzione di autocorrelazione per gli ε_t^2 in un modello ARCH(1)

Rappresentazione AR di un processo ARCH

Un modello ARCH(1) può essere riscritto come un modello AR(1) rispetto a ε_t^2

Infatti, aggiungendo ad ambo i membri della $h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$ la quantità $\varepsilon_t^2 - h_t$ si ottiene:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + v_t$$

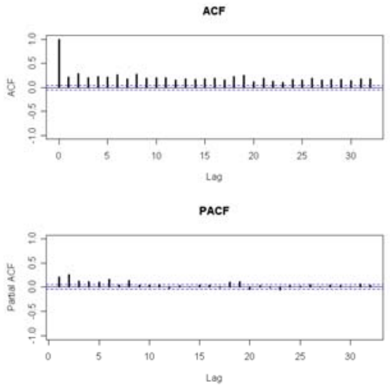
dove $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t = h_t(z_t^2 - 1)$

Poiché un ARCH(1) può essere scritto come un AR(1), per garantire la stazionarietà del processo deve essere $\alpha_1 < 1$

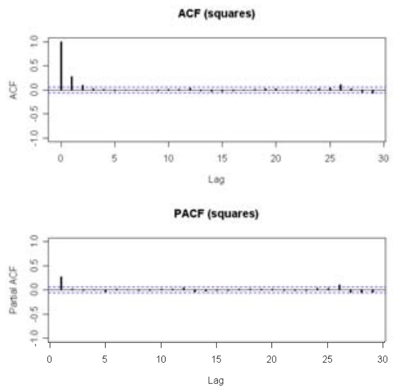
L'autocorrelazione al lag *k* per ε_t^2 è pari a α_1^k

Dal processo ARCH(1) ai processi ARCH(p)

Correlogramma sui rendimenti al quadrato del NASDAQ



Correlogramma per i quadrati di un ARCH(1) simulato



Caratteristiche della funzione di autocorrelazione per i rendimenti al quadrato delle attività finanziarie:
- Valore basso al primo lag
- Valore decrescente molto lentamente

Il modello ARCH(1) non riesce a riprodurre tale andamento perché un basso valore al primo lag implicherebbe una riduzione molto rapida della funzione di autocorrelazione.

Dal processo ARCH(1) ai processi ARCH(p) (2)

-Caratteristiche del processo ARCH(1) rispetto alle proprietà osservate empiricamente su molte serie storiche finanziarie

stazionarietà	sì	OK
incorrelazione	sì	OK
correlazione quadrati	sì	!
indipendenza	no	OK
normalità	no	OK
leptocurtosi	sì	OK
“prevedibilità”		
della media cond.	no	OK
della varianza cond.	sì	OK

- La correlazione dei quadrati non è del tipo osservato empiricamente
- Limitare la memoria del processo ad un solo istante può essere riduttivo
- Un passo avanti consiste nel considerare *p* ritardi

⇩

Modelli ARCH(p)

I processi ARCH(p)

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t}$$

$$z_t \sim IID(0,1)$$

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2$$

$\omega > 0,\ \alpha_i \ge 0,\ per\, i = 1,2,\ldots,p$ per la non negatività della varianza

$$z_t \sim NID(0,1) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_t \mid I_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

I processi ARCH(p) (2)

Rappresentazione AR(*p*)

$\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + v_t$ per cui $\sigma^2 = \dfrac{\omega}{1-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_p}$

- Esistono dei risultati che forniscono le condizioni per l'esistenza dei momenti, in particolare del momento quarto. Quando quest'ultimo esiste, evidenzia leptocurtosi.

- Il processo ARCH(*p*) lineare con $\omega > 0,\ \alpha_1 \ge 0,\ per\, i = 1,2,\ldots,p$ è (debolmente) stazionario se e solo se $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p) < 1$

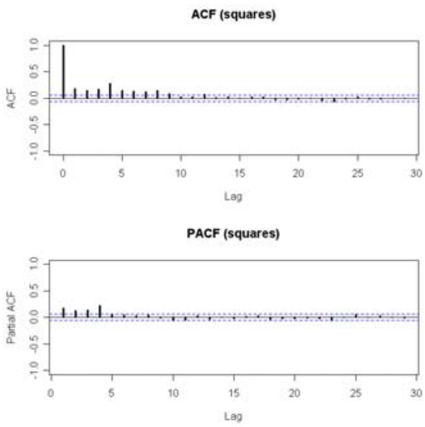
- Questa condizione coincide con la richiesta che tutte le radici dell'equazione caratteristica associata al polinomio autoregressivo della rappresentazione AR di ε_t^2 risultino esterne al cerchio di raggio unitario nel caso di parametri positivi.

- ε_t^2 ha una funzione di autocorrelazione simile a quella di un AR(*p*) classico. Risultato utile a formulare una strategia per l'identificazione preliminare dell'ordine *p* del processo ARCH.

- Procedura Box-Jenkins sulle autocorrelazioni dei quadrati.

I processi ARCH(p) (3)

Correlogramma per i quadrati di un ARCH(5) simulato



Stima di un modello ARCH(5) su dati reali (ENI)

```
Coefficient(s):
    Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
a0 6.442e-05   6.143e-06   10.488  < 2e-16 ***
a1 1.244e-01   2.326e-02    5.348 8.91e-08 ***
a2 1.224e-01   2.717e-02    4.503 6.69e-06 ***
a3 1.272e-01   2.574e-02    4.943 7.70e-07 ***
a4 1.852e-01   3.002e-02    6.170 6.82e-10 ***
a5 1.612e-01   3.515e-02    4.587 4.49e-06 ***
```