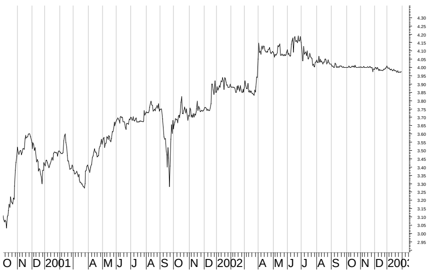
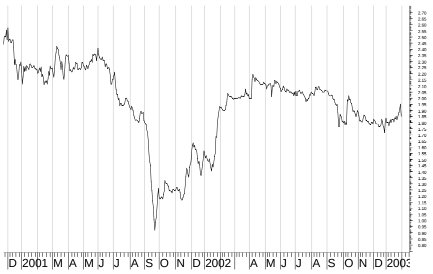
L’analisi della volatilità

Volatilità e correlazione

Unipol



Snia



Qual è la volatilità di ognuno dei due titoli? → analisi della variabilità

Qual è la relazione fra le due serie storiche? → analisi della correlazione

La volatilità delle attività finanziarie

- Due approcci:
  - La scuola della option pricing → volatilità implicita

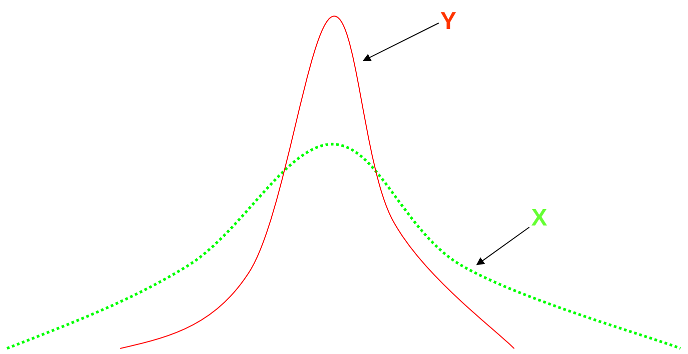
  Le variazioni dei prezzi vengono modellate considerando il tempo continuo
  - La scuola della previsione statistica → volatilità statistica

  Le variazioni dei prezzi e la correlazione vengono modellate considerando il tempo discreto

- NB: in entrambe le scuole volatilità e correlazione vengono considerate come parametri di particolari processi stocastici utilizzati per modellare le variazioni dei prezzi.

Confronto fra distribuzioni con diversa variabilità

$$M(X) = M(Y)$$
$$V(X) > V(Y)$$



Rilevanza dello studio della volatilità

La volatilità dei cambi influenza: le riserve internazionali, il valore delle commesse in valuta estera espresse in moneta nazionale, la bilancia dei pagamenti → effetti sui salari, sui prezzi dei beni di consumo, sulla produzione e sull'occupazione.

•CAPM (*Capital Asset Pricing Model*): modello di gestione di un portafoglio. Hp: relazione diretta fra rendimento e volatilità.

•Pricing delle opzioni.

•*Effetto leverage*: la volatilità dei rendimenti tende a crescere dopo rendimenti negativi e a diminuire dopo rendimenti positivi.

La volatilità statistica

Rischio di un investimento: probabilità di perdere o ridurre il valore dell'investimento iniziale, derivante da un movimento avverso nelle variabili di mercato a cui l'investimento stesso è collegato.

Rischio generalmente espresso in termini di volatilità del rendimento.

Esempio 1
Volatilità di ENI inizio 2001 → 27% del valore medio
Volatilità di Vitaminic inizio 2001 → 55% del valore medio
Rendimento di Vitaminic in un arco di 5 mesi → 120% del rendimento di ENI

Esempio 2
Volatilità di Enel primi 5 mesi 2001 → 18.34%
Volatilità di Seat Pagine Gialle primi 5 mesi 2001 → 48%
Rendimento negativo di Seat 3 volte superiore a quello negativo di Enel

⇩

Maggiore volatilità comporta possibili maggiori perdite e maggiori guadagni.
La volatilità può offrire grosse opportunità a chi accetta e impara a gestire il suo lato negativo: il rischio.

La volatilità statistica (2)

- E' una misura delle fluttuazioni dei rendimenti (e quindi dei prezzi). Pertanto essa rappresenta una misura di rischio dell'attivo finanziario.
- La volatilità non è direttamente osservabile. Ad esempio, considerando la serie dei rendimenti giornalieri dell'indice DAX, la volatilità giornaliera non è direttamente osservabile dai rendimenti, dato che esiste una sola osservazione per giorno.
- Tuttavia, guardando alla serie dei rendimenti, si osservano *clusters* di volatilità, cioè la volatilità può essere alta in alcuni periodi di tempo e bassa in altri (volatility clustering).
- C'è quindi persistenza (autocorrelazione) nella volatilità: alta (bassa) volatilità tende ad essere seguita da alta (bassa) volatilità.
- La volatilità non sembra crescere indefinitamente, ma, piuttosto, sembra variare all'interno di un intervallo fisso. Da un punto di vista statistico può quindi essere modellata con un modello stazionario.

La volatilità statistica (3)

- Se la volatilità è autocorrelata in maniera sostanziale, significa che ha margini di prevedibilità, al contrario dei rendimenti che non sono (o sono poco) prevedibili.
- In parecchi casi la volatilità sembra reagire differentemente (asimmetria della volatilità) a grandi incrementi di prezzo (grandi rendimenti positivi) o a grandi cadute di prezzo (grandi rendimenti negativi).
- Queste evidenze empiriche devono essere tenute presenti nel costruire modelli per i rendimenti.

Comparabilità delle misure di variabilità

- Presupposto: i rendimenti sono incorrelati nel tempo → impossibilità di prevedere i rendimenti futuri sulla base dei rendimenti passati;
- → L'incertezza aumenta all'aumentare della lunghezza dell'intervallo temporale considerato (la variabilità media calcolata su *n* rendimenti giornalieri cresce al crescere di *n*)
- → impossibilità di confrontare la varianza calcolata su *n* giorni con la varianza calcolata su *m* giorni e di confrontare la varianza calcolata su rendimenti con diversa frequenza temp.
- → Deviazione standard in termini annuali (sotto l'ipotesi di rendimenti indipendenti):

$$\sigma_{annuale} = (\sigma\sqrt{A}) \cdot 100$$

Dove A è un fattore di annualizzazione, pari al numero di rendimenti in un anno → possibilità di confrontare (sulla stessa scala) la volatilità di rendimenti aventi diversa frequenza temporale

Comparabilità delle misure di variabilità (2)

- Il fattore *A* è una costante di normalizzazione: la varianza cresce al crescere dell'intervallo di tempo considerato, ma il fattore di annualizzazione decresce.

- Solitamente, per convertire la deviazione standard giornaliera in un valore percentuale annualizzato, si utilizza il numero di giorni di trading compresi in un anno. In genere per rendimenti giornalieri *A*= 250 o 252.

Alcune misure empiriche di volatilità

- **Varianza storica (o *realized volatility*)**

E' semplicemente la varianza dei rendimenti calcolata sull'intero periodo campionario:

$$\hat{\sigma}_r^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(r_t - \bar{r})^2 \cong \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T} r_t^2$$

Dove $\bar{r}$ è la media campionaria dei rendimenti (solitamente prossima a zero se la frequenza è piuttosto elevata. Non per dati mensili).

Esempio Unipol e Snia 1992-2003

				Varianze annualizzate	
		SNIA	UNIPOL	SNIA	UNIPOL
Giornallieri	media r_t	0.000183346	0.000149206		
	var r_t	0.000488695	0.000255208	12.2173862	6.380199
	media r_t^2	0.000488729	0.00025523		
Settimanali	media r_t	0.001158408	0.001285114		
	var r_t	0.002977409	0.001286088	15.48252476	6.687657
	media r_t^2	0.002978753	0.001287454		
Mensili	media r_t	0.005772595	0.005097992		
	var r_t	0.011361845	0.004713097	13.6342142	5.655716
	media r_t^2	0.011395435	0.004739294		

Rendimenti giornalieri

	SNIA	UNIPOL
varianza calcolata sull'ultimo anno	0.000243029	0.0000221

Confronta con la varianza calcolata su tutto il periodo

12.2174=0.000489*250*100; 15.48=0.00298*52*100 …

Alcune misure empiriche di volatilità (2)

-**Varianza mobile**

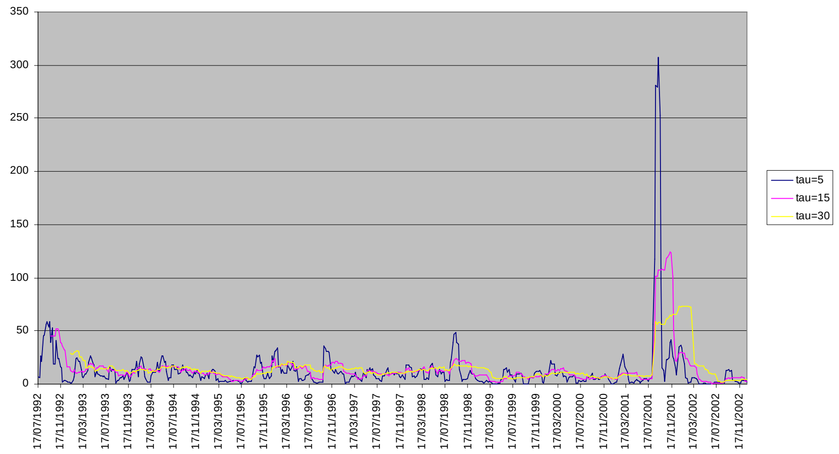
E' la varianza calcolata su intervalli di ampiezza fissa *t* , dove però le osservazioni sono continuamente aggiornate includendo nell'intervallo l'osservazione più recente ed escludendo la più vecchia:

$$\hat{\sigma}_{r,t}^2 = \frac{1}{\tau}\sum_{i=t-\tau+1}^{t}(r_i - \bar{r})^2 \cong \frac{1}{\tau}\sum_{i=t-\tau+1}^{t} r_i^2$$

- E' una media aritmetica semplice (pesi uguali per tutti i rendimenti)
- Utilizzata in alcuni casi come previsione approssimata della volatilità futura nei modelli di pricing delle opzioni che maturano in *n* giorni; ragionevole per previsioni a breve termine;
- Comunemente utilizzata come stima della volatilità nella matrice di covarianza ad *n* giorni per la misura del rischio di portafoglio;
- Utilizzo del fattore di annualizzazione per confronti; Ad esempio: previsione della volatilità nei prossimi 6 mesi → ultimi 26 rendimenti settimanali con *A*=52.

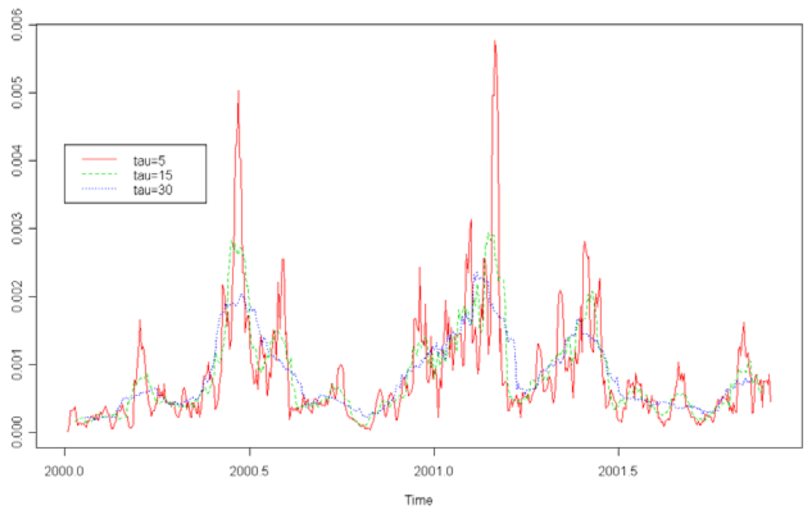
Esempio. Volatilità mobile su Snia. 31/7/1992-31/1/2003. Rendimenti settimanali

Le diverse stime della volatilità sono state annualizzate con A=52



Picco: attentato torri gemelli. L'effetto dell'attentato permane per un intervallo pari a tau: effetto fantasma (ghost) dovuto unicamente al periodo della m.m.

Esempio. Volatilità mobile su ENI. 3 gen 2000 – 31 ott 2001. Rendimenti giornalieri – Codice in R



Volatilità con medie mobili esponenziali

La misura di volatilità mobile non è soddisfacente dato che tutti i rendimenti hanno lo stesso peso all'interno della formula → medie mobili esponenziali → peso superiore alle osservazioni più recenti → considerano l'ordine temporale dei rendimenti.

- **Varianza mobile esponenziale**

$$\hat{\sigma}_t^2 = (1-\lambda)(r_t - \bar{r})^2 + \lambda\hat{\sigma}_{t-1}^2 \cong (1-\lambda)r_t^2 + \lambda\hat{\sigma}_{t-1}^2$$

Problema dell'inizializzazione: prima previsione uguale al rendimento al quadrato del tempo 0.

Dove λ è la costante di lisciamento. Si attribuisce un peso pari a (1- λ) all'ultimo valore osservato.

$(1-\lambda)r_t^2 \longrightarrow$ Intensità della ***reazione*** della volatilità agli eventi del mercato: al decrescere di λ aumenta la velocità di reazione all'informazione di mercato compresa nel rendimento di oggi;

$\lambda\hat{\sigma}_{t-1}^2 \longrightarrow$ ***Persistenza*** della volatilità: indipendentemente da ciò che accade sul mercato, se la volatilità è stata elevata ieri essa sarà elevata anche oggi.

Volatilità con medie mobili esponenziali (2)

Tramite sostituzioni successive si ha:

$$\hat{\sigma}_t^2 = (1-\lambda)\sum_{i=0}^{t}\lambda^i r_{t-i}^2$$

Alcune considerazioni sulla costante di lisciamento

- Utilizzando la media mobile esponenziale, la stima della volatilità risultante reagirà immediatamente alla presenza di un eventuale rendimento molto elevato. L'effetto di tale rendimento sulla stima della volatilità diminuirà gradualmente col passare del tempo. La reazione della stima della volatilità con media mobile esponenziale agli eventi del mercato persiste perciò nel tempo con una forza che dipende dalla costante di lisciamento. Più alto il valore della costante, maggiore sarà il peso attribuito alle osservazioni più lontane e più la serie risulterà lisciata.

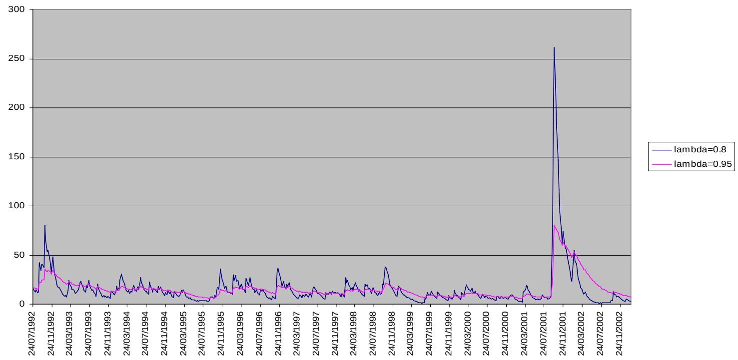
- L'effetto di un singolo evento diminuisce perché 0 < λ < 1. Più la costante di lisciamento si avvicina a 1, più la volatilità risulta persistente.

Volatilità con medie mobili esponenziali (3)

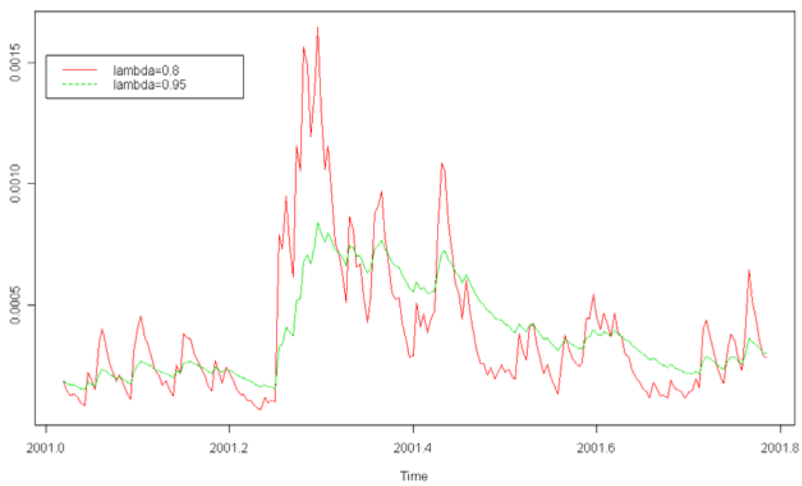
Alcune considerazioni sulla costante di lisciamento (continua)

- Valori elevati della costante comportano una bassa reazione agli eventi di mercato, ma una elevata persistenza della volatilità; un basso valore della costante produce stime della volatilità altamente reattive che rapidamente vengono riassorbite (bassa persistenza).

Esempio su Snia (rendimenti settimanali). Valori annualizzati



Esempio. Volatilità mobile su ENI. 3 gen 2000 – 31 ott 2001. Rendimenti giornalieri – Codice in R



Volatilità con medie mobili esponenziali (4)

- **N.B.:** i parametri di *reazione* e *persistenza* non sono indipendenti perché la loro somma è sempre pari a uno.
- → quale valore utilizzare quindi per la costante di lisciamento? Una regola pratica in molti mercati è quella di utilizzare approssimativamente 0.75< λ <0.98.
- Estremo inferiore → alta reattività, bassa persistenza. Per previsioni a breve termine.
- Estremo superiore → alta persistenza, bassa reattività. Per previsioni a lungo termine.
- E' il metodo utilizzato da Riskmetrics per stimare la volatilità (solitamente con costante pari a 0.94; corrisponde ad una mm non pesata di 20-30 gg).

Alcune considerazioni sulla volatilità

- Misure proxy della volatilità istantanea possono essere il quadrato o il valore assoluto dei rendimenti.

- In generale la volatilità è una varianza condizionata e, più precisamente, è

$$\text{var}(r_t \mid I_{t-1}) = \sigma_t^2$$

Pertanto una buona strada per stimare la volatilità è quella di costruire un modello per i rendimenti con varianza condizionata variabile secondo un qualche schema, meglio se parametrico e parsimonioso.

- Una risposta è rappresentata dalla classe dei modelli GARCH (e varianti).