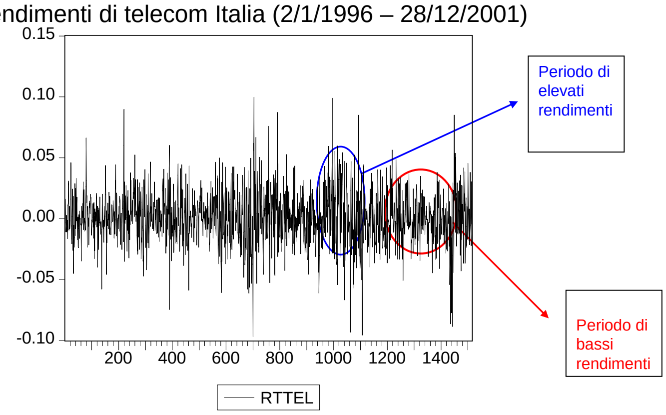
La dipendenza temporale dei rendimenti

Il concetto di volatility clustering

Nella serie dei rendimenti si alternano gruppi di rendimenti elevati e gruppi di rendimenti bassi. Concetto strettamente legato alla leptocurtosi.

Rendimenti di telecom Italia (2/1/1996 – 28/12/2001)



-Variazioni dei rendimenti non indipendenti.
-La varianza dei rendimenti muta nel tempo → *eteroschedasticità*

La funzione di autocorrelazione. Definizione

Il rendimento di un'attività finanziaria al tempo *t* è legato al rendimento della stessa attività al periodo (*t+k*)?
La dipendenza lineare si misura con la *Funzione di Autocorrelazione*

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{T-k}(r_t - \bar{r})(r_{t+k} - \bar{r})}{\sum_{t=1}^{T-k}(r_t - \bar{r})^2}$$

Misura la relazione lineare esistente fra i rendimenti sfasati di *k* periodi

La funzione di autocorrelazione (2)

-Estensione del concetto di correlazione alle serie storiche

$$-1 \le \rho_k \le +1$$

$\rho_k = \rho_{-k}$ → funzione pari

il grafico della funzione di autocorrelazione per *k = 1,2,…,r* viene chiamato *correlogramma*.

-Per k>m si ha

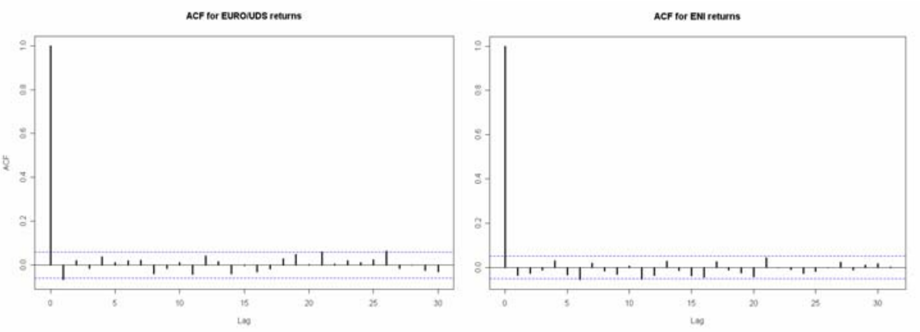
$$\text{var}(\hat{\rho}_k) \cong \frac{1}{T}\sum_{i=-m}^{m}\rho_i^2$$

Dove m è il lag a partire dal quale la funz. di autocorrelazione è nulla

Sotto l'ipotesi nulla che r_t sia W.N. si elimina la sommatoria

→ bande di confidenza per la funzione.

Esempi di correlogrammi dei rendimenti



-**Bande di confidenza al livello** α

$$\pm z_{\alpha/2} * \sqrt{\operatorname{var}(\rho_k)}$$

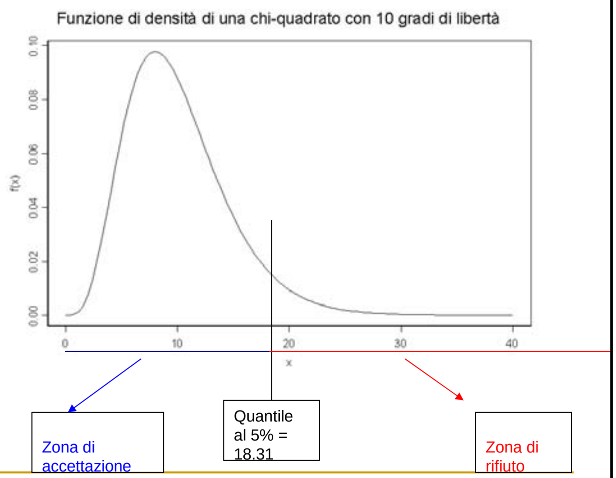
Test Q di Ljung-Box

H_0: assenza di correlazione per i rendimenti fino al lag m.
H_1: presenza di correlazione per i rendimenti fino al lag m.
Statistica-test:

$$Q(m) = T \cdot (T+2) \sum_{k=1}^{m} \frac{\rho_k^2}{T-k}$$

Sotto l'ipotesi nulla

$$Q(m) \sim \chi^2_m$$



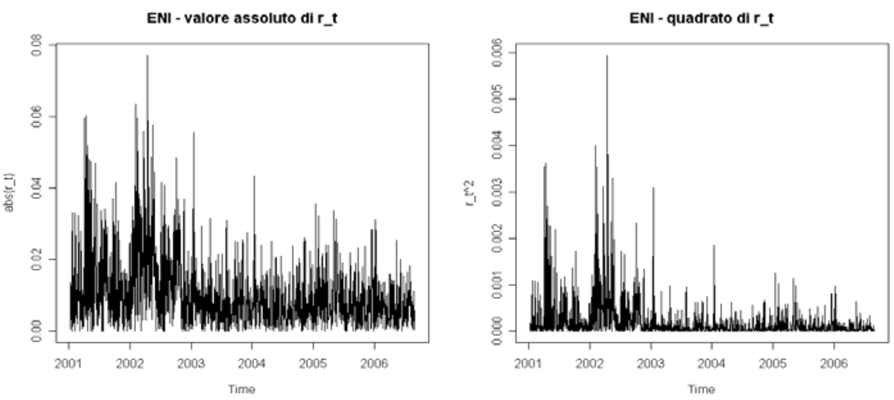
Esempio. Test di Ljung-Box per ENI (rendimenti giornalieri)

Lag	ACF	Q-Stat	Prob
0	1.000	1.951	0.162
1	-0.036	2.989	0.224
2	-0.027	3.220	0.359
3	-0.013	4.562	0.335
4	0.030	6.232	0.284
5	-0.034	10.773	0.096
6	-0.056	11.348	0.124
7	0.020	11.759	0.162
8	-0.017	13.268	0.151
9	-0.032	13.360	0.204
10	0.008	17.527	0.093
11	-0.053	19.531	0.076
12	-0.037	20.749	0.078
13	0.029	21.010	0.101
14	-0.013	23.059	0.083
15	-0.037	25.996	0.054
16	-0.044	26.948	0.059
17	0.025	27.177	0.076
18	-0.012	28.055	0.082
19	-0.024	30.485	0.062

-I rendimenti (giornalieri, settimanali, ecc.) delle serie finanziarie sono (solitamente) statisticamente incorrelati. Nel caso in cui alcuni valori siano statisticamente diversi da zero, non hanno comunque significato economico.
-Difficoltà nell'applicazione di regole di trading basate sulla dipendenza fra i rendimenti

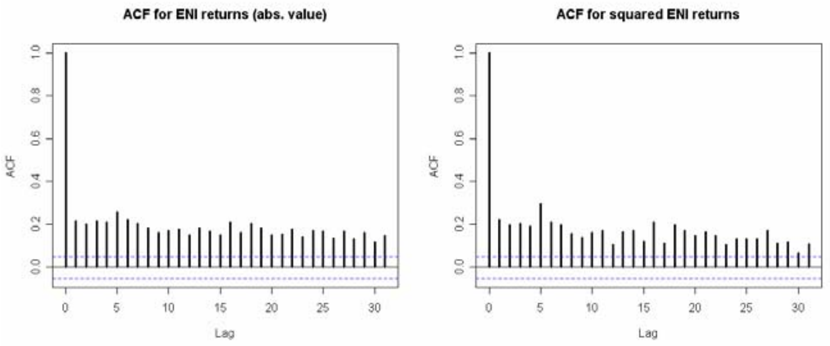
N.B.: incorrelazione implica indipendenza solo se la variabile è distribuita normalmente

LE TRASFORMAZIONI DEI RENDIMENTI



Più evidente il *volatility clustering*

LA DIPENDENZA NELLE SERIE TRASFORMATE DEI RENDIMENTI



L'autocorrelazione decresce molto lentamente.

Il valore atteso dei rendimenti al quadrato stima la varianza dei rendimenti (media circa pari a zero).
Infatti

$$\mathrm{var}(r_t) = E[r_t - E(r_t)]^2$$
$$= E(r_t^2) - [E(r_t)]^2$$

Autocorrelazione dei rendimenti trasformati

Test Q di Ljung e Box per i rendimenti in valore assoluto

lag	AC F	Q-Stat	Prob
0	1	69.52444147	0
1	0.217475223	128.6214512	0
2	0.200435946	197.0791065	0
3	0.215653044	263.111608	0
4	0.211726434	362.3993127	0
5	0.259534721	436.5912254	0
6	0.224273229	497.3129455	0
7	0.202825477	547.8812966	0
8	0.185029548	586.9558704	0
9	0.162592284	631.0896538	0
10	0.172738602	678.720014	0
11	0.179389354	712.4897432	0
12	0.150997352	763.5181909	0
13	0.185550627	806.0816865	0
14	0.169404716	840.7045184	0

Test Q di Ljung e Box per i rendimenti al quadrato

lag	ACF	Q-Stat	Prob
0	1	72.51452865	0
1	0.22210255	129.5291866	0
2	0.196872982	191.7134732	0
3	0.205534586	244.6681174	0
4	0.189604323	372.8946763	0
5	0.294942071	438.7486127	0
6	0.211295391	496.8573576	0
7	0.198413501	534.2751847	0
8	0.159162581	563.2862828	0
9	0.140098953	601.9065939	0
10	0.161588967	644.5504144	0
11	0.169739448	661.4951316	0
12	0.106960323	701.7164495	0
13	0.164734437	745.7311533	0
14	0.172268449	768.2117222	0

Alcune considerazioni sintetiche sulle caratteristiche dei rendimenti

- Le distribuzioni dei rendimenti presentano code “pesanti”.
- I picchi delle distribuzioni dei rendimenti sono più elevati rispetto alla normale → **leptocurtosi e *volatility clustering***
- *Interpretazione finanziaria*: rispetto alla distribuzione normale si verificano più frequentemente rendimenti molto elevati o molto bassi.
- I rendimenti presentano autocorrelazioni basse.
- I rendimenti elevati al quadrato presentano solitamente valori statisticamente significativi delle autocorrelazioni.
- *Interpretazione finanziaria*: si può escludere la dipendenza lineare dei rendimenti nel tempo. E’ invece possibile affermare che esista una dipendenza temporale di grado più elevato di quella lineare. Infatti grazie alla leptocurtosi l’incorrelazione non implica indipendenza.

ULTERIORI CARATTERISTICHE DEI RENDIMENTI: LE ANOMALIE DI CALENDARIO (osservate sui mercati americani)

- *Effetto gennaio*: i rendimenti tendono ad essere più elevati nel mese di gennaio.
- *Effetto giorno della settimana*: rendimenti con tendenza ad essere positivi il mercoledì e il venerdì e negativi il lunedì.
- *Effetto vacanze*: media dei rendimenti superiori nei giorni precedenti le vacanze.
- *Effetto infra-mese*: rendimenti maggiori nella prima metà del mese.

- **Anomalia non legata al calendario**
- *Small firm effect*: elevata correlazione dei rendimenti con la dimensione delle imprese → maggiore è la capitalizzazione minore è il rendimento.

Esercizio

Data la seguente funzione di autocorrelazione per il quadrato dei rendimenti del titolo Telecom (1008 osservazioni):

k	rho(k)
1	0.143
2	0.096
3	0.052
4	0.029

1. Si dica quali valori possono essere considerati statisticamente diversi da zero ad un livello del 5%;
2. Si calcoli la statistica Q di Ljung-Box per uno sfasamento pari a 4 e si dica quali conclusioni si possono trarre (95-esimo percentile della chi-quadrato con 4 gdl = 9.488).

Soluzione

Bande di confidenza:

P[-1.96*1/radq(1008)<rho(k)<+1.96*1/radq(1008)]=
= P[-0.0617<rho(k)<+0.0617] = 0.95

1008*1010*[(0.143^2)/1007+(0.096^2)/1006+
(0.052^2)/1005+(0.029^2)/1004] =
=33.3926