

---

## I RENDIMENTI

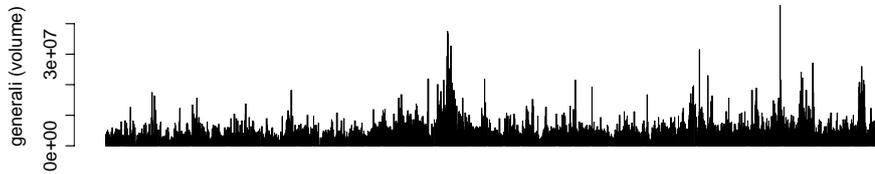
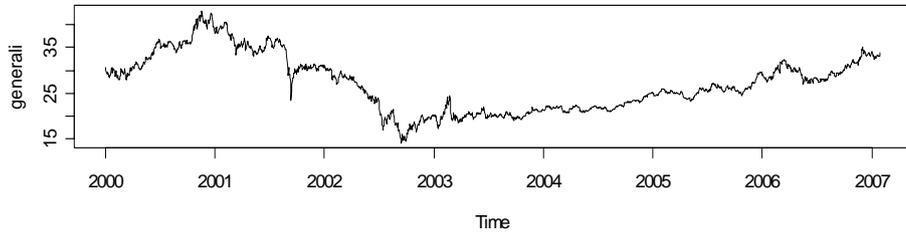
---

---

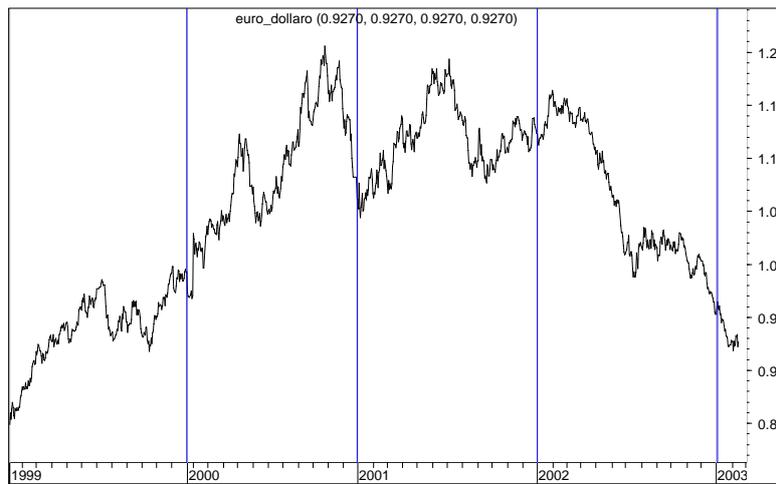
## LE SERIE STORICHE FINANZIARIE

- **Attività finanziarie**
  - Azioni (es. Capitalia, Mediaset, ...)
  - Titoli di stato (BOT, BTP, ...)
  - Tassi di cambio (Euro/Dollaro, Euro/Sterlina, ...)
  - Indici di Borsa (S&P/MIB, CAC40, ETF ...)
  - Tassi di interesse (tasso ufficiale di sconto, tassi interbancari, ...)
  - Merci o *commodities* (oro, petrolio, ...)
  - Prodotti finanziari derivati (opzioni, contratti *forward*, contratti *futures*)
-

## Generali gen2000-feb 2007 (dati giornalieri)



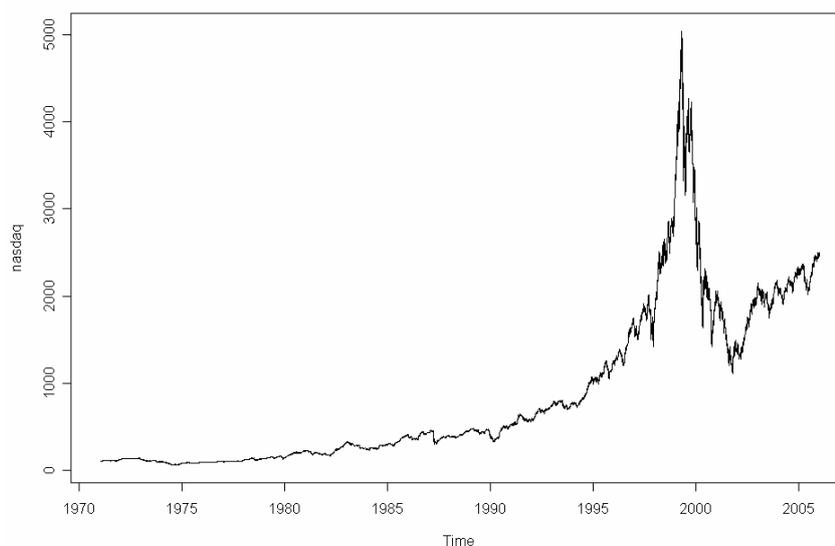
## Cambio Euro-Dollaro 1999- gen 2003



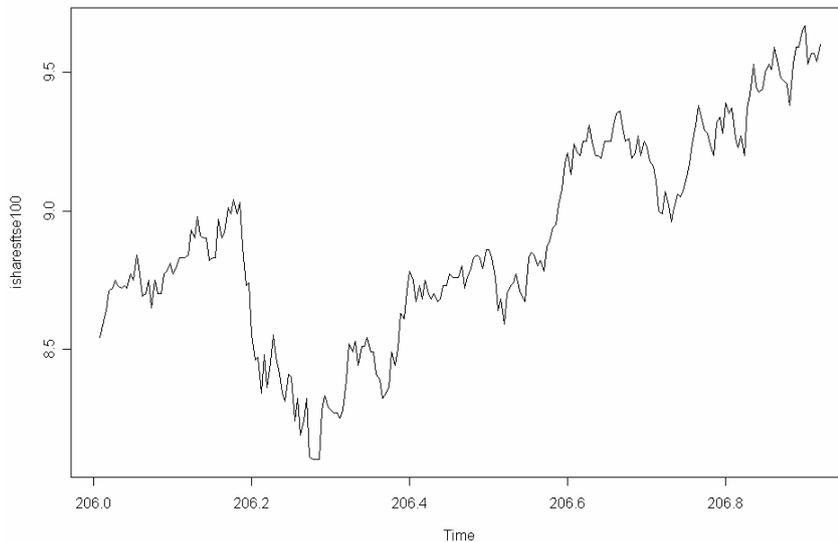
## Prezzo del petrolio 1993 – gen 2003



## NASDAQ 1971 – feb 2007



## ETF: ISHARES FTSE 100



## LE SERIE STORICHE FINANZIARIE Tipi di analisi

- Singole attività
- Prezzi, rendimenti, volatilità
  
- Portafoglio di attività
- Rendimenti di un portafoglio, rischio associato ad un portafoglio, scelta del portafoglio ottimo.

## I rendimenti

### Rendimento assoluto

$$RA_t = P_t + D_t - P_{t-1}$$

Influenza dell'unità di misura e dell'ordine di grandezza dell'investimento iniziale, varianza proporzionale ai prezzi

### Rendimento relativo (o tasso di rendimento semplice)

$$R_t = \frac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}} - 1$$

$$\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad \text{Capital gain} \quad \frac{D_t}{P_{t-1}} \quad \text{dividend yield}$$

### Rendimento logaritmico (o tasso di rendimento con capitalizzazione continua)

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t + D_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(P_t + D_t) - \ln P_{t-1}$$

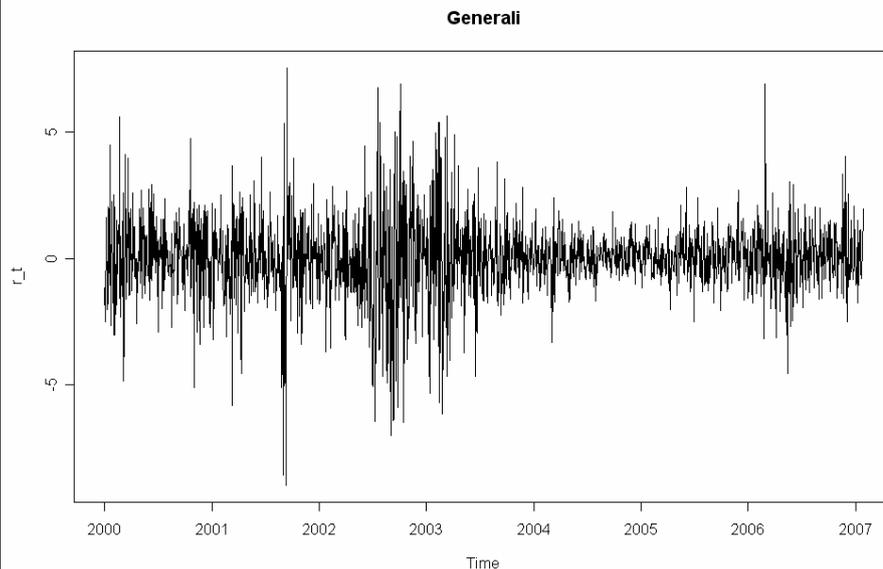
**N.B.:**  $r_t = \ln(1 + R_t)$

## Esempio di calcolo dei rendimenti con $D_t=0$

### Titolo Eni - Prezzi e rendimenti

DATA	CLOSE	RA_t	R_t (%)	r_t (%)
29/01/2007	24.78	-	-	-
30/01/2007	24.77	-0.01	-0.04	-0.04
31/01/2007	24.7	-0.07	-0.28	-0.28
01/02/2007	24.85	0.15	0.61	0.61
02/02/2007	24.64	-0.21	-0.85	-0.85
05/02/2007	24.92	0.28	1.14	1.13
06/02/2007	24.82	-0.10	-0.40	-0.40
07/02/2007	24.78	-0.04	-0.16	-0.16
08/02/2007	24.64	-0.14	-0.56	-0.57
09/02/2007	24.65	0.01	0.04	0.04

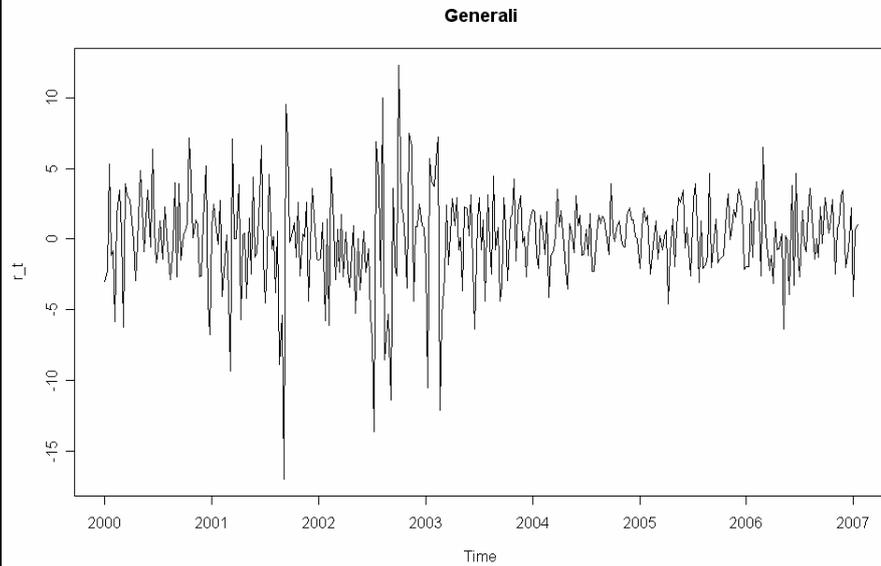
## Generali: rendimenti giornalieri



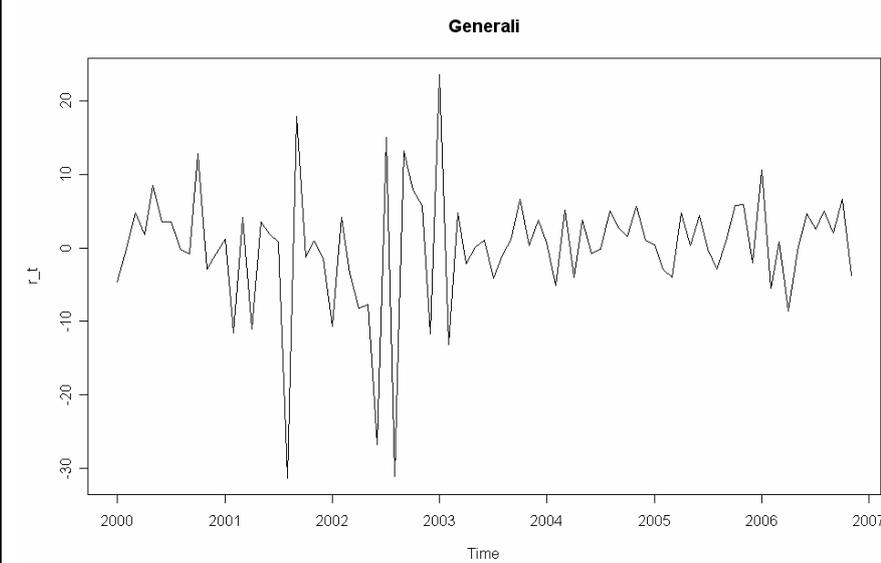
## Calcolo dei rendimenti settimanali

- N.B. per calcolare i rendimenti settimanali, mensili, ecc. a partire da dati giornalieri si possono seguire almeno due strade:
- calcolo dei prezzi medi settimanali (mensili);
- scelta del giorno in relazione al quale calcolare i rendimenti (ad es. mercoledì per i rendimenti settimanali, giorno centrale del mese per i rendimenti mensili).
- Esempio su [DAX30](#)

## Generali: rendimenti settimanali



## Generali: rendimenti mensili



## Una piccola dimostrazione...

**Perché**  $R_t \cong r_t$  ?

Per definizione:

$$P_t = P_{t-1}(1 + R_t)$$

Passando ai logaritmi:

$$p_t = p_{t-1} + \ln(1 + R_t)$$

Attraverso l'espansione in serie di Taylor di  $\ln(1 + R_t)$  attorno a 0 si ottiene:

$$\ln(1 + R_t) \cong R_t$$

per cui

$$R_t \cong p_t - p_{t-1} = r_t$$

## OPERAZIONI DI AGGREGAZIONE DEI RENDIMENTI *Aggregazione temporale*

**Rendimento relativo per  $k$  istanti**

$$R_t(k) = \frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}}$$
$$1 + R_t(k) = \frac{P_t}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdot \dots \cdot \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} =$$
$$= (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \dots (1 + R_{t-k+1}) \Rightarrow$$
$$R_t(k) = [(1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \dots (1 + R_{t-k+1})] - 1$$

Montante unitario per  $k$  giorni su rendimenti relativi

**Rendimento logaritmico per  $k$  istanti**

$$r(k)_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-k}}\right)$$
$$r_t(k) = \ln[1 + R_t(k)] =$$
$$= \ln[(1 + R_t) \cdot (1 + R_{t-1}) \cdot \dots \cdot (1 + R_{t-k+1})] =$$
$$= r_t + r_{t-1} + \dots + r_{t-k+1}$$

N.B.: L'operazione di moltiplicazione è stata convertita in un'addizione.

## Esempio di aggregazione temporale

Rendimenti a tre giorni (k=3) su ENI

DATA	CLOSE	RA_t	R_t	r_t	R_t(3)	r_t(3)
29/01/2007	24.78					
30/01/2007	24.77	-0.010	-0.040	-0.040		
31/01/2007	24.7	-0.070	-0.283	-0.283		
01/02/2007	24.85	0.150	0.607	0.605	0.282	0.282
02/02/2007	24.64	-0.210	-0.845	-0.849	-0.525	-0.526
05/02/2007	24.92	0.280	1.136	1.130	0.891	0.887
06/02/2007	24.82	-0.100	-0.401	-0.402	-0.121	-0.121
07/02/2007	24.78	-0.040	-0.161	-0.161	0.568	0.567
08/02/2007	24.64	-0.140	-0.565	-0.567	-1.124	-1.130
09/02/2007	24.65	0.010	0.041	0.041	-0.685	-0.687

Ad es.:  $R_4(3)=0.282=[(0.9996*0.99727*1.00607)-1]*100$   
 $\dots$   
 $r_4(3)=0.282=-0.040-0.283+0.605$

## Aggregazione cross-section

Portafoglio costituito da N attività fin. Misurato in due istanti  $t_0=0$ ,  $t_1=1$ .

$$\begin{matrix} P_{10} & P_{20} & \dots & P_{N0} \\ P_{11} & P_{21} & \dots & P_{N1} \\ q_{10} & q_{20} & \dots & q_{N0} \end{matrix} \quad w_i = \frac{P_{i0}q_{i0}}{\sum_{i=1}^N P_{i0}q_{i0}} \quad \begin{matrix} \text{Peso relativo della } i\text{-esima} \\ \text{attività. Quantità invariate da 0} \\ \text{a 1} \end{matrix}$$

$$r_i = \ln\left(\frac{P_{i1}}{P_{i0}}\right) \Rightarrow P_{i1} = P_{i0}e^{r_i} \quad q_{i0}P_{i0} = w_iP_0$$

$$P_0 = \sum_{i=1}^N P_{i0}q_{i0} = \sum_{i=1}^N w_iP_0$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^N P_{i1}q_{i0} = \sum_{i=1}^N P_{i0}e^{r_i}q_{i0} = \sum_{i=1}^N w_iP_0e^{r_i}$$

$$r_{port} = \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) = \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^N w_iP_0e^{r_i}}{P_0}\right) = \ln\left(\sum_{i=1}^N w_i e^{r_i}\right)$$

## Aggregazione *cross-section* dei rendimenti (2)

### 2) *Rendimento relativo*

-Prezzo del portafoglio  $P_{i1} = P_{i0}(1 + R_i)$

$$P_1 = \sum_{i=1}^N q_{i0} P_{i1} = \sum_{i=1}^N q_{i0} P_{i0} (1 + R_i) = \sum_{i=1}^N w_i P_0 (1 + R_i)$$

$$P_1 = w_1 P_0 (1 + R_1) + w_2 P_0 (1 + R_2) + \dots + w_N P_0 (1 + R_N)$$

-Rendimento del portafoglio

$$R_{port} = \sum_{i=1}^N w_i R_i$$

Infatti,  $R_{port} = [(P_1 - P_0) / P_0]$  e

$$\sum w_i = 1$$

## Esempio di aggregazione *cross-section*

Prezzi di tre titoli (Generali, Telecom, Eni)

Data	generali	telecom	eni
01/07/2002	30.67	9.718	13.791
01/08/2002	30.65	9.745	13.966
01/09/2002	31.13	9.676	13.76
01/10/2002	30.69	9.394	13.536
01/11/2002	30.77	9.4	13.951
01/14/2002	30.33	9.136	13.682
n. pezzi	1000	5000	10000
Pesi ass.	30670	48590	137910
Pesi rel.	0.141226	0.223742	0.635032
$r_{i, \text{settimanale}}$	-0.01115	-0.06176	-0.00794
$R_{i, \text{settimanale}}$	-0.01109	-0.05989	-0.0079

N.B.: i pesi sono calcolati al tempo zero

N.B.: il rendimento settimanale è calcolato rispetto al lunedì, cioè lunedì 14 rispetto a lunedì 7.

## Esempio di aggregazione *cross-section*

(2)

$$\begin{aligned}r_{port} &= \ln(0.141 * \exp(-0.01115) + 0.224 * \exp(-0.06176) + 0.635 * \exp(-0.0079)) \\ &= -0.02019\end{aligned}$$

$$R_{port} = 0.141 * (-0.01109) + 0.224 * (-0.05989) + 0.635 * (-0.0079) = -0.01998$$

### Verifica

$$P_1 = 30.33 * 10000 + 9.136 * 5000 + 13.682 * 10000 = 212830$$

$$P_0 = 30.67 * 10000 + 9.718 * 5000 + 13.791 * 10000 = 217170$$

$$R_{port} = (212830 - 217170) / 217170 = -0.01998$$

$$r_{port} = \ln(212830 / 217170) = -0.02019$$