

Modelli stocastici per la volatilità II

Processi GARCH(p, q)

Difficoltà nell'individuazione dell'ordine dei modelli ARCH.
Modelli ARCH con struttura dei ritardi piuttosto lunga per catturare la lunga memoria dei dati.



Processi GARCH

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \quad z_t \sim NID(0,1) \Rightarrow \varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, h_t)$$
$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} = \omega + \alpha(L) \varepsilon_t^2 + \beta(L) h_t \quad (1)$$

con

$$\alpha(L) = \alpha_1 L + \dots + \alpha_p L^p \quad \text{e} \quad \beta(L) = \beta_1 L + \dots + \beta_q L^q$$
$$p, q > 0, \omega > 0, \alpha_i, \beta_j \geq 0, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q.$$

Rappresentazione ARMA di un GARCH(p, q)

Aggiungendo ε_t^2 e $\beta(L)\varepsilon_t^2$

ad entrambi i membri della (1) e spostando h_t nel membro di destra, si ha

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) \varepsilon_{t-i}^2 - \sum_{i=1}^q \beta_i v_{t-i} + v_t$$

che è un modello ARMA(m, q) con $m = \max(p, q)$, $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$, $\alpha_i = 0$ per $i > p$

$\beta_j = 0$ per $j > q$

Esempio: GARCH(2,1)

$$\begin{aligned} \varepsilon_t^2 &= \omega + (\alpha_1 + \beta_1) \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + v_t - \beta_1 v_{t-1} \\ &\Rightarrow \text{ARMA}(2,1) \end{aligned}$$

Esempio: GARCH(1,2)

$$\begin{aligned} \varepsilon_t^2 &= \omega + (\alpha_1 + \beta_1) \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_2 \varepsilon_{t-2}^2 + v_t - \beta_1 v_{t-1} - \beta_2 v_{t-2} \\ &\Rightarrow \text{ARMA}(2,2) \end{aligned}$$

Condizioni di stazionarietà per un GARCH(p, q)

- Un processo GARCH(p, q) è stazionario in senso debole se e solo se

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$$

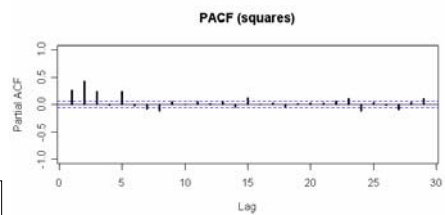
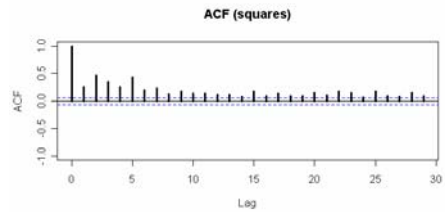
- Le condizioni

$$p, q > 0, \omega > 0, \alpha_i, \beta_j \geq 0, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q.$$

sono sufficienti a garantire la non negatività della varianza, ma non sono strettamente necessarie.

Esempio. GARCH(2,2)

Correlogramma per i quadrati di un processo GARCH(2,2) simulato



	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
a0	1.162e-02	1.600e-03	7.265	3.73e-13 ***
a1	2.101e-01	7.259e-03	28.945	< 2e-16 ***
a2	1.385e-01	4.615e-02	3.001	0.00269 **
b1	5.615e-02	2.274e-04	24.692	< 2e-16 ***
b2	3.097e-01	1.354e-01	2.287	0.02219 *

Stima dei parametri su processo GARCH(2,2) simulato

Il processo GARCH(1,1)

Caso particolare di un processo GARCH(p,q) con p=1 e q=1.

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \quad z_t \sim NID(0,1) \Rightarrow \varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \quad (1)$$

$$\text{con } \omega > 0, \alpha_1, \beta_1 \geq 0 \quad \alpha_1 + \beta_1 < 1$$

Rappresentazione ARMA di un GARCH(1,1)

Aggiungendo ad ambo i membri della (1) la quantità $\varepsilon_t^2 + \beta_1 \varepsilon_{t-1}^2$ e ponendo

$$v_t = \varepsilon_t^2 - h_t, \text{ si ottiene}$$

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha_1 + \beta_1) \varepsilon_{t-1}^2 - \beta_1 v_{t-1} + v_t \Rightarrow \text{ARMA}(1,1)$$

Dunque un GARCH(1,1) può essere interpretato come un ARMA(1,1) nei quadrati.

Condizioni di stazionarietà per un GARCH(1,1)

- La condizione di stazionarietà per un GARCH(1,1) è

- Sostituendo ad h_{t-1} la sua espressione e procedendo ricorsivamente, il processo (1) può essere riscritto nel seguente modo:

$$h_t = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_1^i \omega + \alpha_1 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_1^{i-1} \varepsilon_{t-i}^2$$

Processo GARCH(1,1) riscrivibile come un ARCH(∞);



GARCH(1,1) approssimabile con un ARCH(p) con p sufficientemente grande;
GARCH(1,1) descrizione più parsimoniosa di un ARCH di ordine elevato.

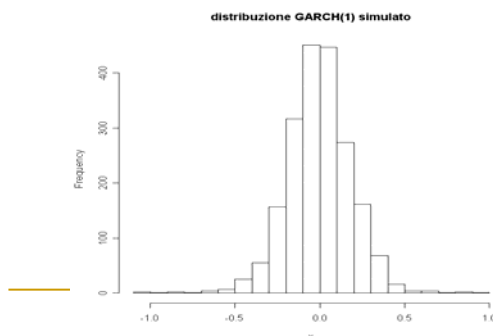
Caratteristiche empiriche di un GARCH(1,1)

-Condizionatamente all'assunzione che $z_t \sim NID(0,1)$ la curtosi di un processo GARCH(1,1) è data da

$$K_\varepsilon = \frac{3[1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2]}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2}$$

Poiché $[1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2] > 1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2$, la curtosi di un processo GARCH(1,1) è > 3 .

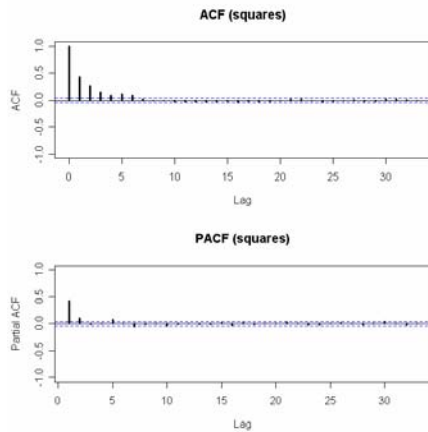
Statistiche descrittive per un GARCH(1,1) simulato



mediana	-0.005
media	-0.004
varianza	0.036
minimo	-1.050
massimo	0.988
asimmetria	-0.165
curtosi	5.337
jarque-bera	464.127
p-value jb	0

Alcuni esempi

Correlogramma per i quadrati di un GARCH(1,1) simulato



Stima di un GARCH(1,1) su ENI

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
a0	1.842e-06	6.161e-07	2.990	0.00279	**
a1	5.226e-02	8.188e-03	6.382	1.74e-10	***
b1	9.373e-01	9.428e-03	99.421	< 2e-16	***

Processi ARMA-GARCH

$$\phi(L)y_t = \mu + \theta(L)\varepsilon_t \quad \varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t} \quad z_t \sim NID(0,1)$$

$$\varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i h_{t-i}$$

- Si noti che non è y a seguire il modello GARCH, ma ε .
- I modelli GARCH puri sono dei particolari ARMA-GARCH con

$$\phi(L) = \theta(L) = 1.$$

L'effetto *leverage*

Nei mercati azionari si osserva spesso una volatilità più elevata nei periodi di mercato ribassista rispetto ai periodi di mercato rialzista.

La reattività della volatilità a rendimenti negativi elevati è spesso superiore rispetto a rendimenti positivi aventi la stessa dimensione in valore assoluto.

Motivazione: quando le quotazioni scendono i debiti rimangono costanti nel breve periodo → il rapporto debito/quotazione (*leverage*) cresce → il futuro della società diventa più incerto → le quotazioni azionarie diventano più volatili.

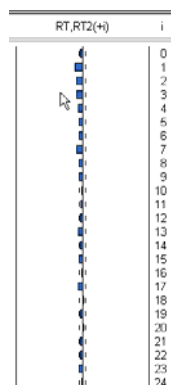
L'effetto leverage implica una asimmetria nel volatility clustering sui mercati azionari: la volatilità è più elevata in seguito a rendimenti negativi rispetto a quelli successivi a rendimenti positivi → l'autocorrelazione fra i rendimenti di ieri e il quadrato dei rendimenti di oggi sarà elevata e di segno negativo.

Ciò si misura calcolando il coefficiente di autocorrelazione di primo ordine fra i rendimenti ritardati ($k=1$) e i quadrati dei rendimenti correnti. Cioè, ponendo la media dei rendimenti pari a zero, si ha:

$$\sum_{t=2}^T r_t^2 r_{t-1} / \sqrt{\sum_{t=2}^T r_t^4 \sum_{t=2}^T r_{t-1}^2}$$

L'effetto *leverage* (2)

Se il coefficiente di autocorrelazione è negativo e significativamente diverso da zero (esterno alle bande di confidenza) c'è un'asimmetria nel volatility clustering che non può essere catturato da un modello GARCH simmetrico



Esempio sul MIB30